OUVRAGES SUR LE CALCUL VECTORIEL

ÉCRITS EN FRANÇAIS.

MASSAU (J.). — **Leçons de Mécanique rationnelle**, 1911-1913.

Encyclopédie des Sciences mathématiques, édition française. Tome IV, 4 : *Fondements géométriques de la Statique* (article de H.-E. Timerding et Lucien Lévy). Tome IV, 16 : *Notions géométriques fondamentales* (article de M. Abraham et P. Langevin).

BURALI-FORTI et MARCOLONGO. — **Calcul vectoriel et applications**, traduit par S. Lattès, 1911.

BURALI-FORTI et MARCOLONGO. — **Analyse vectorielle générale**, Tome I : *Transformations linéaires*, 1912. Tome II : *Applications physico-mathématiques*, 1913.

GUIOT (J.). — **Le Calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie réglée**, 1912.

COFFIN (J.-G.). — **Calcul vectoriel**, traduit par Alex. Véronnet, 1914.

LEVEUGLE (R.). — **Précis de calcul géométrique**, 1920.

SILBERSTEIN (L.). — **Éléments d'Algèbre vectorielle et d'Analyse vectorielle**, traduit par G. Matisse, 1921.

JUVET (G.). — **Introduction au Calcul tensoriel et au Calcul différentiel absolu**,

APPELL (P.). — **Éléments de la Théorie des Vecteurs et de la Géométrie analytique**, 1922.

LAFAY. — **Notations et formules vectorielles.** Note annexe au Cours de Physique (polycopie) de l'École Polytechnique, 1922-1923.

POMEY (J.-B.). — **Principes de Calcul vectoriel et tensoriel**,

CALCUL VECTORIEL

THÉORIE

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET CINÉMATIQUES

DESTINÉ AUX ÉLÈVES DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET AUX ÉTUDIANTS EN SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

PAR

A. CHATELET

ANCIEN ÉLÈVE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
DOYEN
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

J. KAMPE DE FÉRIET

MAITRE DE CONFÉRENCES DE MÉCANIQUE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE,
PROFESSEUR DE MÉCANIQUE
A L'INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

PRÉFACE.

Ce Livre a été écrit après l'expérience de plusieurs années d'enseignement : à Toulouse, en 1913-1914, aux étudiants du certificat de Mécanique rationnelle et appliquée (1); à Lille, depuis 1919, aux étudiants des certificats de Mathématiques générales, de Mécanique rationnelle, de Mécanique appliquée et aux étudiants d'une année de Génie civil à l'Institut industriel du Nord de la France. Cette expérience nous a donné la conviction que *l'habitude du Calcul Vectoriel peut être très rapidement acquise par les élèves, mathématiciens, physiciens ou ingénieurs, quoique ses notations ramassées déconcertent un peu, de prime abord, ceux qui ont déjà une certaine pratique des axes et des coordonnées de la Géométrie analytique.*

Il nous semble en outre certain que ce Calcul constitue un progrès et une simplification notables pour quiconque prend la peine de s'en assimiler convenablement la technique. Il conduit à des formules plus expressives, où les divers termes ont un sens physique ou géométrique évident et dont l'aspect condensé aide particulièrement la mémoire; les transformations d'égalités y sont beaucoup réduites et rendues intuitives par leurs analogies avec le Calcul algébrique ordinaire. Il reste naturellement sans grand intérêt dans les études sur la Géométrie projective, sur les courbes et les surfaces algébriques générales; mais ces études semblent maintenant un peu

(1) Ce m'est un devoir de rendre, à ce sujet, hommage à la mémoire de mon ancien collègue de la Faculté de Toulouse, M. S. Lattès, décédé en 1918. On sait qu'il est l'auteur des traductions de plusieurs livres italiens sur le Calcul Vectoriel. Les longues conversations que j'ai pu avoir avec lui, l'échange fréquent de nos idées m'ont été d'un secours inappréciable dans mon enseignement d'abord, dans la rédaction de ce livre ensuite. A. Ch.

Vecteurs et grandeurs vectorielles;
Équipollence ou égalité géométrique de deux vecteurs;
Somme et différence géométriques;
Produit d'un vecteur par un nombre ou scalaire;
Produit intérieur, ou scalaire, de deux vecteurs;
Produit extérieur, ou vectoriel, de deux vecteurs.

Les applications immédiates, que nous en avons données aux n^{os} 23 et 28, montrent qu'on pourrait, sans doute avec profit, baser l'enseignement élémentaire de la Trigonométrie sur une exposition préalable de quelques éléments de Calcul Vectoriel, qui remplacerait l'emploi du théorème des projections et de la formule de Chasles. La notion d'axialité de l'espace, que nous avons essayé de préciser aux n^{os} 16 et 17, a été complétée au paragraphe VII par l'étude parallèle de l'homogénéité et de la symétrie des expressions et formules, vectorielles ou scalaires.

Au Chapitre II nous avons fait, en partant des notions précédentes, un exposé succinct des principes de la Géométrie analytique à 2 et 3 dimensions : formules d'angles et distances, équations de droites et de plans, changement du trièdre de référence. On y reconnaîtra les méthodes usuelles transcrites en langage vectoriel; nous espérons qu'il apparaîtra que cette transcription n'est pas factice et qu'au contraire les méthodes usuelles sont une traduction, quelquefois lourde, en langage analytique d'opérations évidentes et simples sur des vecteurs. Nous aurions pu développer à ce sujet l'étude de la Géométrie réglée; nous avons pensé que cette étude bornée à ses éléments aurait fait un peu double emploi avec celle des systèmes de vecteurs qui est exposée au Chapitre V. Nous avons réservé pour le début de la Note I quelques développements sur les coordonnées obliques.

Les Chapitres III et IV sont consacrés à l'étude des vecteurs fonctions d'une ou deux variables scalaires (ou numériques); nous avons cherché à montrer qu'on pouvait la faire avec une rigueur comparable à celle qu'on apporte ordinairement à l'étude de l'Analyse dans

les classes de Mathématiques spéciales. Ces fonctions vectorielles introduisent, nous semble-t-il, une certaine souplesse et même une certaine élégance dans l'étude des courbes et des surfaces. Comme application des fonctions vectorielles d'une variable, nous avons étudié les propriétés infinitésimales des courbes, de leurs points singuliers, des développées et des développantes, du contact de deux courbes. En traitant en détail plusieurs exemples particuliers aux nos 114 à 120 et au n° 129, nous pensons avoir montré que le Calcul Vectoriel permet, contrairement à une opinion assez répandue, d'aller jusqu'au bout des questions sans faire intervenir des axes de coordonnées choisis avec plus ou moins d'arbitraire. Nous avons borné les applications des fonctions vectorielles de deux variables à l'étude très succincte de quelques types de surfaces (cylindriques, coniques, de révolution, réglées), de leurs points singuliers, de la courbure des courbes passant par un point simple, des familles de courbes, de leurs trajectoires et de leurs enveloppes. On se rendra compte que, pour ces questions, le Calcul Vectoriel permettrait d'aller bien plus avant et d'aborder facilement de très nombreuses études de Géométrie infinitésimale. Il peut d'ailleurs être considéré dans ce cas comme un intermédiaire entre les méthodes dites *géométriques* et les méthodes dites *analytiques*. Il a un peu de l'élégance des premières et emprunte aux secondes leur manque apparent d'artifice. On pourra à ce sujet comparer certaines pages de ce Livre avec le Cours de Géométrie infinitésimale de notre regretté collègue, M. Demartres (Gauthier-Villars, éditeur), où les méthodes géométrique et analytique sont utilisées parallèlement.

Au Chapitre V nous avons fait l'étude des systèmes de vecteurs glissants, en ayant surtout en vue les deux applications principales de cette théorie à la Statique du Corps Solide (composition des forces) et à la Cinématique du Corps Solide (distribution des vitesses et composition des rotations); nous avons aussi établi à ce sujet quelques propriétés des complexes linéaires de droites, qu'on peut considérer comme les ensembles de droites de moment nul des systèmes de vecteurs.

Dans les Chapitres III, IV et V, nous n'avons guère dépassé les limites des programmes actuels des Concours d'entrée aux Grandes Écoles. Dans le Chapitre VI, au contraire, nous avons joint, à la Cinématique du Point, un exposé assez complet de la Cinématique du Corps Solide (auquel s'adjoint la Note II sur le mouvement d'un plan sur un plan) qui s'adresserait plutôt aux candidats aux Certificats de Mathématiques générales et de Mécanique rationnelle.

Les notions de champs de scalaires ou de vecteurs, ainsi que la définition des invariants différentiels : gradient, divergence, rotationnel, n'entrent pas évidemment dans le cadre que nous venons d'esquisser. Mais elles sont maintenant d'un usage assez constant dans les cours de Physique et d'Élasticité ; nous avons donc cru bon d'y consacrer une Note où l'on trouvera aussi quelques notions sur les coordonnées obliques, les variables covariantes et contravariantes, les coordonnées curvilignes et les intégrales multiples.

Étant donné notre but, nous n'avons indiqué aucun renseignement historique ou bibliographique sur le Calcul Vectoriel même; nous nous contentons de fournir plus haut une liste d'Ouvrages sur la question, écrits en français. Au contraire, nous avons renvoyé assez fréquemment à des Ouvrages de Mathématiques spéciales et de Mécanique pour la comparaison de certaines méthodes ou le développement de certaines théories.

Nous avons l'agréable devoir d'exprimer tous nos remerciements à la maison Gauthier-Villars; avec sa courtoisie et son dévouement traditionnels, elle a bien voulu se charger de l'édition et de l'impression de ce Livre, que nous voudrions pouvoir dire « de Mathématiques spéciales », mais qui, jusqu'à nouvel ordre, reste en dehors des programmes officiels. Nous espérons que cette publication hâtera un peu l'apparition de ce nouvel ordre.

Lille, août 1923.

CALCUL VECTORIEL

ET

APPLICATIONS

CHAPITRE I.

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES VECTEURS.

I. — ÉQUIPOLLENCE ET MESURE SUR UN AXE.

1. **Grandeurs scalaires et grandeurs dirigées.** — Les grandeurs que l'on considère le plus habituellement dans les diverses branches de la Physique, et en particulier en Mécanique, peuvent se classer en deux catégories d'après le nombre et la nature des éléments mathématiques nécessaires pour les caractériser, sans ambiguïté.

Dans le premier groupe, on range les grandeurs telles que la comparaison de deux d'entre elles (supposées de même espèce) ne conduise qu'à la considération d'un seul nombre. Une telle grandeur est ainsi complètement définie quand on se donne un nombre, affecté ou non d'un signe, selon le cas; ce nombre est la *mesure* de la grandeur considérée, c'est-à-dire le rapport de cette grandeur à une grandeur de même espèce, choisie comme *unité*. De telles grandeurs sont appelées *scalaires*.

Exemples : une longueur, une aire, un volume, un angle plan, un angle solide, une masse, une densité, une quantité de chaleur, une résistance électrique, une capacité, une quantité d'électricité, le travail d'une force, une énergie mécanique, etc. Parmi ces grandeurs scalaires, certaines ont pour mesure un nombre essentiellement positif

(une masse, une résistance électrique, etc.), d'autres un nombre affecté d'un signe (une quantité d'électricité, le travail d'une force, etc.).

Les grandeurs du deuxième groupe sont caractérisées ou définies par : un *nombre*, mesure de leur intensité, et une *direction géométrique*, fixant leur orientation par rapport à des repères; on y joint parfois la donnée d'un *point d'application* qui achève de déterminer leur position par rapport aux repères. De telles grandeurs sont appelées *dirigées* ou encore *vectorielles* parce qu'elles sont susceptibles d'être représentées par des vecteurs [1].

Exemples : un déplacement de translation, la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, une force, une pression ou une tension en un point d'une surface, une percussion, la rotation d'un solide (autour d'un axe), un champ électrique ou magnétique, etc.

2. Vecteurs. — *On appelle* vecteur *une portion de droite comprise entre deux points, sur laquelle on distingue une « origine » et une « extrémité ».*

On peut réserver le mot *segment* au cas d'une portion de droite sans distinction d'origine. Un vecteur est donc un « segment dirigé ».

Nous représenterons un vecteur par deux lettres désignant, la première l'origine, la seconde l'extrémité, ces lettres étant surmontées d'une flèche :

$$\overrightarrow{AB}.$$

Pour la commodité de l'écriture et des calculs, nous représenterons aussi souvent un vecteur par une seule lettre, que nous surmonterons encore d'une flèche :

la flèche servant seulement à rappeler à l'esprit la signification spéciale de la lettre [2].

---

(1) Les deux expressions « scalaire » et « vectoriel » ont été introduites vers 1843 par le mathématicien anglais Hamilton : scalaire, de *scala*, échelle, suggère la notion d'une échelle de mesure; vecteur, de *vehere*, transporter, suggère la notion d'un transport d'un point vers un autre.

(2) Les notations de la théorie des vecteurs sont très différentes suivant les auteurs. Pour représenter un vecteur donné par son origine A et son extrémité B, on ren-

3. Éléments d'un vecteur. — Étant donnés des vecteurs, les longueurs de leurs segments sont des grandeurs scalaires; on sait donc trouver (au moins théoriquement) le rapport des longueurs de deux

Fig. 1.

vecteurs : c'est un nombre *positif*, rationnel ou irrationnel. Si l'on a adopté une unité de longueur, la longueur du segment a une « mesure », nombre positif que nous appellerons le *module* du vecteur.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ *peut alors être considéré comme défini par quatre éléments :*

1° *Son origine* A;

2° *La direction de la droite qui le porte;*

3° *Le sens de parcours sur cette direction, allant de l'origine* A *à l'extrémité* B;

4° *Son module* (*mesure de sa longueur*).

contre les notations suivantes :

$$[AB], \quad \overline{AB}, \quad (AB), \quad B - A.$$

La dernière notation est celle de MM. Burali-Forti et Marcolongo, qui considèrent un vecteur comme une « différence » de points.

Lorsqu'ils représentent un vecteur par une seule lettre, certains auteurs (allemands ou anglais surtout, par exemple M. Coffin, traduit par Véronnet) emploient des caractères gras ou des lettres gothiques, sans autre signe distinctif. Dans son cours de l'École Polytechnique, M. Lafay adopte la notation de Resal, en surmontant la lettre d'un simple trait.

La notation de la flèche, que nous avons adoptée, est celle de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Elle est employée notamment par M. Appell dans son *Traité de Mécanique rationnelle* (4 vol., Gauthier-Villars), ainsi que dans son Ouvrage *Éléments de la théorie des vecteurs et de la Géométrie analytique* (collection Payot), et par M. Haag dans son *Cours de Mathématiques spéciales* (Gauthier-Villars).

mêmes symboles que les vecteurs, le contexte seul indiquant l'espèce particulière de grandeurs désignée; nous emploierons donc les symboles $\vec{a}$ ou $\overrightarrow{AB}$: ce dernier, mettant en évidence une origine A et une extrémité B, suppose implicitement réalisée une représentation graphique de la grandeur par un vecteur.

Dans le langage on emploie couramment le mot « vecteur » au lieu de « grandeur vectorielle » (vecteur vitesse, vecteur force, etc.); nous nous conformerons à cet usage, en nous réservant de préciser parfois les différences existant entre les grandeurs vectorielles quelconques et les vecteurs proprement dits ou « vecteurs géométriques » par lesquels on les représente.

5. **Équipollence.** — *Deux vecteurs* (ou grandeurs vectorielles) $\vec{a}$, $\vec{a'}$ *sont dits « équipollents » s'ils ont même direction, même sens et même module, et s'ils ne diffèrent par suite que par leurs points d'application*. On exprime l'équipollence par le signe = :

L'équipollence possède manifestement les mêmes propriétés que l'égalité (des nombres, des figures, etc.) :

$$\text{Si } \vec{a} = \vec{b}, \qquad \text{on a} \quad \vec{b} = \vec{a};$$

$$\text{si } \vec{a} = \vec{b} \text{ et } \vec{b} = \vec{c} \qquad \text{on a} \quad \vec{a} = \vec{c}.$$

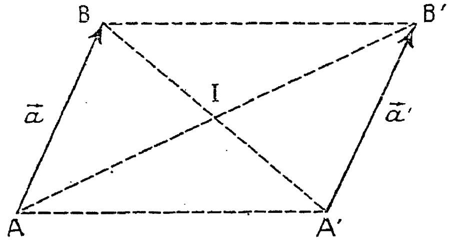
Pour ces raisons, au lieu du mot *équipollence* on emploie couramment *égalité vectorielle*, ou même simplement *égalité*, toutes les fois qu'il ne saurait y avoir ambiguïté.

Si deux grandeurs équipollentes (de même espèce) sont représentées par des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ (avec une même échelle), la figure ABB'A' est un parallélogramme; les deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont équipollents et l'on peut amener $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{A'B'}$ par une translation égale à $\overrightarrow{AA'}$. En revenant aux grandeurs vectorielles elles-mêmes, on voit qu'on peut les faire coïncider, comme les vecteurs représentatifs, par une translation égale au vecteur qui réunit leurs origines.

Enfin, dans le parallélogramme, les diagonales AB′ et BA′ se coupent en leur milieu.

L'une quelconque de ces propriétés peut servir de définition pour

Fig. 2.



l'équipollence des vecteurs géométriques. (Il convient d'être un peu plus restrictif pour l'équipollence des grandeurs vectorielles.)

Tous les vecteurs nuls sont équipollents entre eux; si $\vec{a}$ est un vecteur nul, on écrit comme en algèbre :

Dans les opérations algébriques sur les nombres, si l'on remplace certains des nombres sur lesquels on opère par des nombres égaux, le nouveau résultat est égal à l'ancien ([1]). De même, dans les opérations que nous allons définir sur les vecteurs et les scalaires, on pourra remplacer certains des vecteurs et des scalaires sur lesquels on opère par des vecteurs respectivement équipollents et des scalaires respectivement égaux; le nouveau résultat est équipollent ou égal à l'ancien. D'une façon plus condensée, on énonce ainsi cette propriété :

Dans le calcul vectoriel, les éléments des opérations aussi bien que leurs résultats ne sont définis qu'à une équipollence (ou à une égalité) près.

6. Vecteurs de même direction. — Lorsque deux vecteurs (ou grandeurs vectorielles) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ont même direction (ou encore sont

([1]) Pour que cette propriété ne soit pas un truisme, il faut, bien entendu, considérer les nombres comme des résultats de mesures ou d'opérations concrètes, de sorte que deux nombres égaux peuvent représenter des grandeurs différentes, par exemple des longueurs non confondues, mais cependant égales.

parallèles) on peut, outre leurs modules, comparer leurs sens. *On appelle « rapport » des deux vecteurs (ou grandeurs vectorielles) $\vec{a}$, $\vec{b}$ de même direction le quotient de leurs modules, affecté du signe + ou —, selon qu'ils sont de même sens ou de sens contraire.*

Si les deux grandeurs vectorielles sont de même espèce, leur rapport est un nombre « sans dimensions », c'est-à-dire indépendant de l'unité adoptée pour évaluer leurs modules; dans le cas contraire, leur rapport peut être considéré comme la mesure d'une grandeur scalaire, dont les dimensions sont le quotient des dimensions de la grandeur $\vec{a}$ par les dimensions de la grandeur $\vec{b}$ (*voir* § VII).

On appelle *droite dirigée* ou *axe* une droite sur laquelle on a choisi un vecteur $\vec{u}$ destiné à servir d'unité, dont le sens définit le sens de l'axe et auquel on comparera tout vecteur parallèle à la droite. Le vecteur $\vec{u}$ se nomme le *vecteur unité* ou le *vecteur unitaire* de l'axe.

On appelle « mesure » d'un vecteur parallèle à l'axe son rapport au vecteur unitaire $\vec{u}$. Il résulte des propriétés du quotient des nombres et de la règle des signes que le *rapport de deux vecteurs parallèles à un axe est égal au quotient de leurs mesures.*

Quand on considère des grandeurs vectorielles (qui peuvent être d'espèces différentes) parallèles à un axe, la locution *vecteur unitaire* reste plus spécialement réservée pour désigner une grandeur vectorielle sans dimensions, c'est-à-dire indépendante de toute unité de grandeur et qui caractérise par suite uniquement la direction et le sens de l'axe. La mesure d'une grandeur vectorielle parallèle à l'axe est alors un nombre concret qui a les mêmes dimensions que la grandeur elle-même.

On représente habituellement la mesure du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{a}$ par

$$\overline{AB}, \quad \bar{a}.$$

Le module du vecteur (qui est alors la valeur absolue de sa mesure)

est représenté indifféremment par

$$|\overrightarrow{AB}| \quad \text{ou} \quad |\overline{AB}|, \qquad |\vec{a}| \quad \text{ou} \quad |\bar{a}|.$$

Il est bien entendu que la notation $\overline{AB}$ n'a de sens qu'autant que $\overrightarrow{AB}$ est parallèle à un axe (sur lequel on a choisi un vecteur unitaire); la notion de module est au contraire toujours définie (¹).

7. **Produit d'un vecteur par un scalaire.** — *On appelle « produit » d'un vecteur $\vec{a}$ par le scalaire (ou nombre) k, un vecteur, de même direction que $\vec{a}$ et dont le rapport à $\vec{a}$ est précisément égal à k (en grandeur et en signe).* Ce vecteur n'est défini qu'à une équipollence près ; on le représente par

$$k.\vec{a} \qquad \vec{a}.k;$$

on peut même supprimer le point s'il n'y a pas ambiguïté.

On voit encore que le vecteur $k.\vec{a}$ est obtenu en faisant sur $\vec{a}$ l'homothétie de rapport k (quel que soit d'ailleurs le centre d'homothétie).

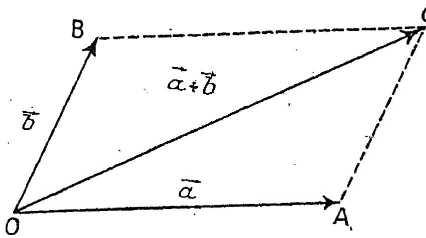
Si le nombre k qui sert à effectuer l'homothétie est le résultat de la mesure d'une certaine grandeur scalaire, le vecteur $\vec{b} = k.\vec{a}$ est une grandeur vectorielle dont le symbole de dimensions est le produit des symboles de k et de $\vec{a}$ (*voir* § VII).

Tous les vecteurs $k.\vec{a}$ sont parallèles à $\vec{a}$. Réciproquement, tout vecteur $\vec{b}$ parallèle à $\vec{a}$ peut s'écrire ainsi; il suffit de prendre pour k le rapport de $\vec{b}$ à $\vec{a}$. En particulier, si l'on considère un axe

(¹) On est souvent amené à considérer simultanément plusieurs axes dans l'espace. On choisit habituellement sur chacun d'eux des vecteurs unitaires égaux en longueur, mais ce choix n'est pas absolument nécessaire et, dans certaines applications, on peut prendre des vecteurs unitaires de longueur différente. Le module d'un vecteur parallèle à l'un des axes n'est plus alors nécessairement égal à la valeur absolue de sa mesure.

et $\overrightarrow{AC}$ équipollents aux vecteurs à additionner $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on peut encore construire à partir de la même origine O, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ équipollents à ces vecteurs. Il est évident que la somme $\overrightarrow{OC}$ déjà obtenue

Fig. 4.



est la *diagonale du parallélogramme construit sur* OA *et* OB.

On représente l'addition géométrique par le même signe + que l'addition des nombres, et ceci est justifié parce qu'elle jouit des mêmes propriétés de *commutativité* et d'*associativité :*

$$\cdots = \vec{b} + \vec{a}, \qquad \vec{a} \cdots \qquad = (\vec{a} + \vec{b}) \cdots \vec{c}.$$

Ces propriétés sont évidentes sur les figures : la première résulte de ce que, dans la règle du parallélogramme, les deux vecteurs jouent le même rôle. La seconde signifie que, dans la règle du polygone pour trois vecteurs, on peut remplacer la ligne polygonale BCD par le vecteur $\overrightarrow{BD}$ somme de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

De ces égalités on déduit, comme en arithmétique, que dans une somme d'un nombre quelconque de vecteurs, on peut permuter d'une façon quelconque les termes et remplacer plusieurs d'entre eux par leur somme effectuée. Si l'on ajoute un même vecteur aux deux membres d'une égalité vectorielle (c'est-à-dire d'une équipollence), on a encore une égalité.

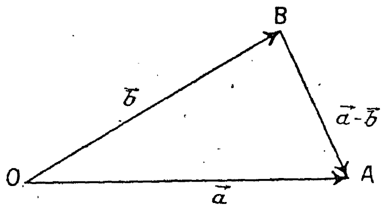
La somme d'un vecteur $\vec{a}$ et du vecteur nul est toujours égale à $\vec{a}$, et inversement le vecteur nul est le seul qui, ajouté à un vecteur $\vec{a}$, donne un vecteur égal à $\vec{a}$.

somme de $\vec{a}$ et du vecteur opposé à $\vec{b}$ [1] :

ce qu'on écrit habituellement d'une façon abrégée $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, de sorte que, comme en arithmétique, le signe — précédant un vecteur signifie, indifféremment, qu'il faut retrancher ce vecteur de celui qui le précède, ou encore ajouter son opposé.

On peut présenter cette règle sous une forme un peu différente : si l'on mène, à partir d'une même origine O, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ équipollents à $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la différence $\vec{a} - \vec{b}$ est équipollente au vecteur $\overrightarrow{BA}$ qui va du vecteur à retrancher au vecteur dont on retranche. Cette

Fig. 5.



nouvelle règle, évidente sur la figure, se déduit aussi immédiatement de la règle précédente.

Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient équipollents, est que leur différence soit un vecteur nul.

Dans une égalité on peut changer un vecteur de membre à condition de le remplacer par son opposé, soit encore de changer le signe qui le précède.

Dans une suite de vecteurs séparés par des signes + et —, on peut permuter d'une façon quelconque les termes et remplacer certains d'entre eux par le résultat effectué des opérations indiquées.

---

(1) Pour le démontrer, il suffit d'ajouter le vecteur $-\vec{b}$ aux deux membres de l'égalité de définition, puis de supprimer dans le premier membre le vecteur nul

$$\vec{b} + (-\vec{b}).$$

11. Théorème de Chasles. — Étant donnés des vecteurs ou grandeurs vectorielles de même espèce, tous parallèles à une même droite dirigée, leur somme est également parallèle à cette droite; en outre, on peut définir les mesures des vecteurs et de la somme sur cette droite dirigée.

Ces mesures sont liées par la propriété suivante, connue sous le nom de « théorème de Chasles » :

La mesure de la somme géométrique de vecteurs parallèles à une même droite dirigée est la somme algébrique des mesures de chacun des vecteurs.

En remplaçant les vecteurs par des vecteurs équipollents placés bout à bout (comme il a été dit pour faire la somme), le théorème s'exprime par l'égalité

$$\overline{AB} + \overline{BC} \cdot \qquad \cdot \overline{KL} = \overline{AL}.$$

C'est une propriété bien connue dont la démonstration correcte et complète nécessiterait une définition préalable des nombres irrationnels et des opérations sur ces nombres. Considérons seulement que le théorème est manifeste dans le cas

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0,$$

car les mesures des vecteurs opposés sont, presque par définition, des nombres opposés. Remarquons aussi que le théorème « semble » évident pour deux vecteurs de même sens (B entre A et C) :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

On en déduit aisément tous les autres cas pour deux vecteurs et l'on étend ensuite à un nombre quelconque.

12. Identités géométrico-algébriques. — On connaît l'emploi du théorème de Chasles, qui, associé au théorème des projections, est la base de nombreuses démonstrations de formules de géométrie ou trigonométrie. Dans beaucoup de cas on peut le remplacer avantageusement par l'emploi des identités suivantes, qui sont vraies quels que soient les scalaires x, y, ..., et les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... (de même

espèce ou de mêmes dimensions) :

$$x.(\vec{a}+\vec{b}+\ldots)=x.\vec{a}+x.\vec{b}+\ldots, \qquad (1')$$

$$+y+\ldots).a = x.a \quad .\vec{a}+\ldots.$$

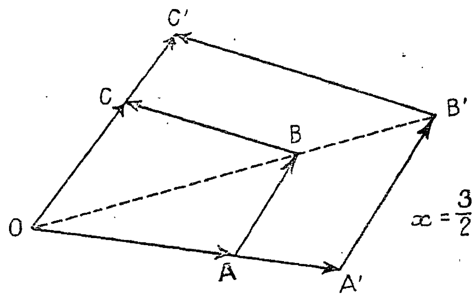
Ces identités complètent l'identité (1) indiquée au nº 7 pour les produits successifs d'un vecteur par deux scalaires.

Dans la première, tous les signes $+$ désignent des sommes de vecteurs. Dans la seconde, les signes $+$ du premier membre sont des signes d'addition algébrique, ceux du second membre sont des signes d'addition géométrique.

La première égalité résulte de ce que, pour prendre l'homothétique de la somme

dans le rapport x, il suffit de prendre l'homothétique de chacun des vecteurs composants dans le même rapport x. Cela est en évidence sur

Fig. 6.



la figure, et provient de ce que l'homothétie conserve le parallélisme [1].

La deuxième égalité résulte immédiatement du théorème de Chasles. Les vecteurs du second membre sont parallèles à une même direction; si l'on prend $\vec{a}$ pour unité, leurs mesures sont respectivement $x, y, \ldots$. Donc leur somme a pour mesure $x+y+\ldots$; c'est bien le vecteur du premier membre.

---

[1] On a déjà utilisé un cas particulier de cette propriété (x positif) pour établir que la somme est indépendante de l'échelle (nº 8).

Dans le cas particulier où la droite et le plan sont perpendiculaires, on dit que la projection est *orthogonale*.

Dans le dernier théorème énoncé, pour que les projections soient orthogonales, il faut et il suffit que le trièdre Ox, y, z soit trirectangle (chacune des arêtes perpendiculaire à chacune des faces ou encore les arêtes perpendiculaires deux à deux).

Cette notion de projection (oblique ou parallèle, sur un plan ou sur une droite) s'étend naturellement aux grandeurs vectorielles. Comme dans le cas de la somme, on représente par un vecteur la grandeur à projeter; la projection de ce vecteur est le vecteur représentatif de la grandeur projection. Un changement d'échelle amplifie dans le même rapport les deux vecteurs représentatifs; la projection de la grandeur est donc bien indépendante de l'échelle de représentation.

14. Coordonnées ou projections d'un vecteur. — On peut remplacer la donnée d'un vecteur et les opérations sur les vecteurs (ou grandeurs vectorielles) par la donnée de trois nombres et des opérations sur des systèmes de trois nombres. Voici comment on opère habituellement : on se donne trois axes issus d'un même point O (ce sont des droites sur lesquelles on a choisi un vecteur unitaire) et formant un trièdre, soient Ox, Oy, Oz; ceci étant, tout vecteur est la somme de ses composantes sur ces axes et chacune de ces composantes est parfaitement déterminée par sa mesure sur l'axe qui la porte. Soient $\vec{a}$ un vecteur et X, Y, Z les mesures de ses composantes; on a donc

$$\begin{aligned} a = {} & \text{vecteur de mesure X sur } Ox \\ & + \text{vecteur de mesure Y sur } Oy \\ & + \text{vecteur de mesure Z sur } Oz. \end{aligned}$$

Les trois nombres X, Y, Z sont appelés les *coordonnées*, ou encore les *projections* ou les *composantes* (par abréviation pour « mesure des projections » ou des « composantes ») du vecteur $\vec{a}$.

A tout vecteur $\vec{a}$ de l'espace, défini à une équipollence près, on fait ainsi correspondre un système de trois nombres X, Y, Z; et réciproquement, à tout système de trois nombres correspond un et

en déduit les composantes de la *différence* de deux vecteurs :

$$X - X', \quad Y - Y', \quad Z - Z',$$

et, par suite, les conditions d'équipollence qui sont que ces composantes soient nulles.

Enfin, pour le parallélisme, il faut et il suffit que

$$\vec{a} = m.\vec{a}',$$

d'où, en utilisant les composantes déjà trouvées pour le deuxième membre, les conditions indiquées.

Il est intéressant de remarquer que les conditions de parallélisme constituent un des énoncés du *théorème de Thalès : le rapport des projections de deux vecteurs parallèles sur une même droite est égal au rapport des vecteurs eux-mêmes*, et, par suite, est indépendant de la droite support des projections.

16. Sens des trièdres. — Dans la plupart des applications il est commode d'adopter comme axes de coordonnées un système d'*axes rectangulaires* avec *une même unité* sur chacun d'eux. Mais il convient, en outre, au moins pour certaines questions, de préciser comment sont orientés les axes l'un par rapport à l'autre.

Étant donnés deux trièdres trirectangles Ox, y, z ; $O'x', y', z'$, dont les arêtes sont rangées dans un ordre déterminé, on dit *qu'ils sont de même sens ou de sens contraires, suivant qu'on peut, ou non, les superposer par un déplacement, les arêtes de même nom venant en coïncidence.*

Pour effectuer cette comparaison on déplace, par exemple, le second trièdre, et on amène l'angle droit $(O'x', O'y')$ en coïncidence avec (Ox, Oy); d'après les propriétés des déplacements, sa position est alors bien déterminée et $O'z'$, perpendiculaire à $O'x'y'$, vient en coïncidence avec Oz ou avec son prolongement; dans le premier cas, les deux trièdres sont de même sens; dans le second, ils sont de sens contraires. En outre, on voit que, dans ce second cas, pour rendre les trièdres de même sens, il suffit d'effectuer sur l'un d'eux une *symétrie*, soit par rapport à un plan, soit par rapport à un point.

Pour comparer les deux trièdres, on peut encore amener en coïncidence deux arêtes de même nom, par exemple, $O'z'$ sur Oz; les

trièdres sont de même sens ou de sens contraires suivant qu'une rotation autour de l'arête, ainsi rendue commune, permet ou non d'amener en coïncidence les angles droits (Ox, Oy); $(O'x', O'y')$.

Ces procédés de comparaison conduisent aux règles suivantes : *deux trièdres sont de même sens ou de sens contraires, suivant que, pour un observateur placé successivement sur deux arêtes correspondantes* Oz, $O'z'$, *et parcouru des pieds à la tête par ces axes, les dièdres* (Oxz, Oyz), $(O'x'z', O'y'z')$ *sont de même sens ou de sens contraires;* ou bien encore, *suivant que dans les plans de deux faces correspondantes* Oxy, $O'x'y'$, *supposés opaques* (¹) *du côté de l'espace opposé à la troisième arête, les angles correspondants* (Ox, Oy), $(O'x', O'y')$ *sont de même sens ou de sens contraires.*

Considérons, par exemple, la figure constituée par un angle droit dans le plan du papier, une demi-droite perpendiculaire en avant, et tous les trièdres obtenus en numérotant ces trois droites dans tous les ordres possibles (*fig.* 9).

Fig. 9.

Les trièdres 1, 2, 3 sont de même sens entre eux, de même les trièdres 4, 5, 6, mais tout trièdre du premier groupe est de sens contraire à tout trièdre du second groupe. On le vérifie aisément par des déplacements évidents.

Cette comparaison des six trièdres montre que, dans un même

(¹) Dans un plan qui n'est pas opaque, le sens d'un angle donné change selon que, pour le regarder, on se place d'un côté ou de l'autre du plan.

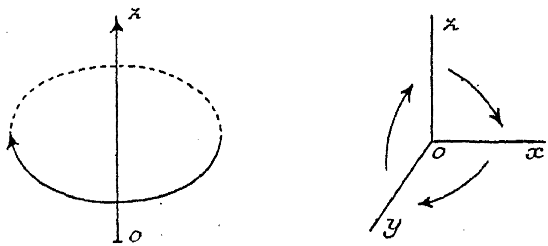
Lorsqu'on a adopté dans l'espace un trièdre (I), auquel on compare ensuite tous les autres, on dit qu'on a *orienté l'espace*, ou encore, qu'on a choisi une *axialité de l'espace*.

Dans un espace orienté un trièdre quelconque est dit *positif* ou *direct* s'il est de même sens que le trièdre de comparaison (I), il est dit *négatif* ou *inverse* s'il est de sens contraire à (I). De même un *sens de rotation autour d'un axe* IZ, ou encore *dans un plan opaque* IX, IY est *positif* ou *négatif* suivant qu'il est ou qu'il n'est pas de même sens que (I).

Les trièdres et les sens positifs sont donc de même sens entre eux; ils sont de sens contraire aux trièdres et aux sens négatifs, qui sont de même sens entre eux.

En France, dans la plupart des Traités de *Géométrie analytique* et de *Mécanique*, on choisit comme trièdre de comparaison un trièdre

Fig. 12.



tel que, pour un observateur parcouru par Oz des pieds à la tête, l'axe Ox soit à gauche et Oy à droite. Alors le sens des angles (Ox, Oy), (Oy, Oz), (Oz, Ox), vus de l'intérieur du trièdre, soit encore le sens positif de rotation autour d'un axe ou dans un plan opaque, est *le sens de gauche à droite* (celui des aiguilles d'une montre) (*fig.* 12).

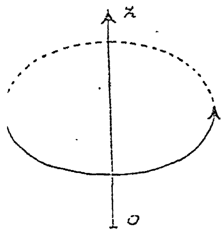
En *Astronomie* et en *Électricité* on choisit ordinairement le sens inverse, *de droite à gauche* (*fig.* 13) [1]. C'est, d'ailleurs, le sens de rotation de la Terre autour de son axe dirigé du Sud au Nord, c'est aussi le sens de circulation des planètes autour du Soleil pour

[1] Dans les figures ci-dessus, on a supposé un angle droit dans le plan de la feuille et une demi-droite perpendiculaire en avant de la feuille, on a représenté le trièdre vu de l'intérieur.

un axe perpendiculaire au plan de l'écliptique, faisant un angle aigu avec la ligne Sud-Nord. C'est encore le sens de rotation des lignes de force du champ magnétique produit par un courant électrique indéfini, autour de ce courant.

Il y a intérêt à rapprocher du *sens de l'Astronomie* les règles bien

Fig. 13.



connues du *tire-bouchon de Maxwell* et des *trois doigts :*

pour faire progresser un tire-bouchon (usuel) suivant Oz, il faut le faire tourner dans le sens Ox, Oy;

avec les doigts de la *main droite*, le pouce étant sur Ox, l'index sur Oy, le médius vient sur Oz.

IV. — PRODUIT INTÉRIEUR OU SCALAIRE DE DEUX VECTEURS.

18. Définition du produit intérieur. — Soient deux vecteurs ou grandeurs vectorielles $\vec{a}$, $\vec{b}$, non nécessairement de même espèce. Choisissons arbitrairement des sens $x'x$, $y'y$, ou, ce qui revient au même, des « vecteurs unitaires », sur les droites supports des vecteurs (voir *fig.* 14). Sur ces axes les vecteurs ont alors des *mesures* $\overline{a}$, $\overline{b}$:

Le produit intérieur de $\vec{a}$ par $\vec{b}$ est le NOMBRE (*ou scalaire*) *égal au produit de leurs mesures par le cosinus de l'angle des deux axes*

Les notations pour représenter ce produit sont assez diverses, il y a cependant une tendance à adopter les signes habituels de la mul-

21. Cas particuliers. — Les propriétés suivantes, qui résultent immédiatement de la définition, ont un grand intérêt pratique :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit intérieur de deux vecteurs soit nul, est que l'un des vecteurs soit nul, ou que les deux vecteurs soient perpendiculaires.

Le produit intérieur d'un vecteur par lui-même est égal au carré de son module, ou, ce qui revient au même, au carré de sa mesure :

$$\vec{a}.\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = (\overline{a})^2.$$

D'une façon abrégée, on désigne ce produit sous le nom de « carré du vecteur $\vec{a}$ », et nous le représenterons par le symbole $\left(\vec{a}\right)^2$.

22. Expression du produit en fonction des projections. — Soient trois axes *rectangulaires* Ox, Oy, Oz et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires sur ces axes, supposés de même longueur. On obtient immédiatement leurs produits mutuels :

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1,$$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

Par suite, si l'on considère deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{a}'$ de projections (X, Y, Z), (X′, Y′, Z′), en les écrivant sous la forme (2) (n° 14) et effectuant le produit par la règle (3‴) du produit de deux sommes :

$$\vec{a}.\vec{a}' = (X \quad \cdot Y.\vec{j} + Z.\vec{k}).(X'.\vec{i} + Y'.\vec{j} + Z'.\vec{k}) = X.X' + Y.Y' + Z.Z'.$$

En particulier le carré d'un vecteur est égal à la somme des carrés de ses composantes :

$$\left(\vec{\ }\right)^2$$

D'une façon en quelque sorte inverse, une projection orthogonale s'exprime par un produit intérieur : la *mesure de la projection orthogonale d'un vecteur* $\vec{a}$ *sur un axe* Ot *est égale au produit*

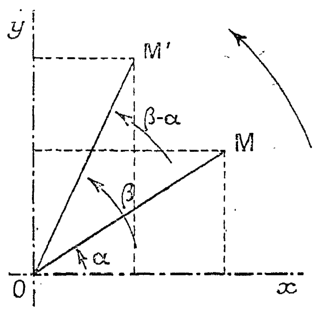
intérieur de ce vecteur par le vecteur unitaire porté par l'axe. En particulier, les projections X, Y, Z d'un vecteur $\vec{a}$ sur les trois axes de coordonnées de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont :

$$X = \vec{a}.\vec{i}, \qquad Y = , \qquad Z = ,$$

23. Applications. — Indépendamment des formules de géométrie analytique dont nous nous occuperons spécialement au Chapitre II, les propriétés du produit scalaire permettent d'établir les formules essentielles de la trigonométrie.

1° Partons de la *définition* des cos et sin que nous avons seulement

Fig. 15.



utilisée jusqu'ici. Soient dans un plan orienté deux axes directement rectangulaires Ox, Oy et $\vec{i}, \vec{j}$ les vecteurs unitaires sur ces axes. Soit enfin un point M, à une distance de O égale à la longueur commune des vecteurs unitaires, choisie sur les deux axes. En appelant α l'angle (Ox, OM), $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont par définition (¹) les projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les axes Ox, Oy. Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha.$$

(¹) Ceci montre que les notions élémentaires sur les vecteurs que nous venons de donner jusqu'ici pourraient utilement servir d'introduction à une exposition élémentaire de la Trigonométrie. On en trouvera un exemple dans le *Cours de Trigonométrie* de M. Rousseau (Janny, éditeur, Lille).

En calculant le carré du vecteur on démontre la relation bien connue :

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

2° Sur la même figure considérons un deuxième vecteur $\overrightarrow{OM'}$ également de longueur 1 et tel que $(Ox, OM') = \beta$.

Évaluons le produit intérieur $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM'}$: il est égal au cosinus de l'angle des deux directions positives, soit $\cos(\beta - \alpha)$.

D'autre part, on peut l'évaluer en fonction des projections respectives des deux vecteurs, soit

$$(\cos\alpha, \sin\alpha); \qquad (\cos\beta, \sin\beta);$$

d'où

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta . \cos\alpha + \sin\beta . \sin\alpha;$$

c'est la formule également bien connue de soustraction des arcs, d'où l'on peut déduire toutes les autres formules d'addition.

3° Considérons encore un triangle ABC dont les mesures des côtés sont les nombres positifs a, b, c. Élevons au carré l'égalité vectorielle évidente (*voir* n° 10) :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA},$$

nous obtenons :

Les carrés $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2$, $\left(\overrightarrow{CB}\right)^2$, $\left(\overrightarrow{CA}\right)^2$ sont les carrés des longueurs c^2, a^2, b^2 ; pour évaluer le produit $\overrightarrow{CB} . \overrightarrow{CA}$ prenons comme sens positifs ceux de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, les mesures de ces vecteurs sont les nombres positifs b, a ; l'angle des axes est, au signe près, l'angle $\widehat{C}$ du triangle compris entre 0 et π. D'où la relation bien connue :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba . \cos\widehat{C}.$$

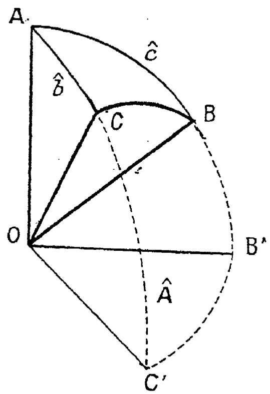
4° Soit un angle trièdre OA, OB, OC, les faces sont les angles positifs a, b, c (compris entre 0 et π) que font les arêtes. Dans la face OAB menons OB′ perpendiculaire à OA, du même côté que OB. De même dans la face OAC menons OC′ perpendiculaire à OA et du même côté que OC. Dans chacune de ces faces prenons comme sens positifs des angles les sens de (OA, OB′), (OA, OC′). Moyennant ces

conventions :

$$(OA, OB) = c \qquad (OA, OC) = b + 2k\pi;$$

en outre l'angle des droites OB', OC' constitue un rectiligne du dièdre d'arète OA. Comme il est dans un plan non orienté, il est au signe près égal à ce dièdre A.

Fig. 16.



Ceci posé, considérons plus spécialement les points A, B, C, B', C' situés à l'unité de distance de O. Dans les deux faces orientées, on peut écrire les égalités vectorielles

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\cos c + \overrightarrow{OB'}.\sin c, \qquad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\cos b + \overrightarrow{OC'}.\text{si}$$

En faisant le produit scalaire de ces deux égalités membre à membre et remarquant que le produit de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB'}$, de même que par $\overrightarrow{OC'}$, est nul

$$\cos a = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \cos c.\cos b + \left(\overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OC'}\right).\sin c.\sin b,$$

soit encore en remplaçant le dernier produit intérieur par cos A :

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A.$$

Cette formule donne la relation entre les faces et les dièdres d'un angle trièdre. Elle donne aussi une relation entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique; elle est connue pour cette raison

sous le nom de « formule fondamentale de la trigonométrie sphérique ». Nous ne la donnons ici qu'à titre d'exemple d'application du produit intérieur de deux vecteurs.

V. — PRODUIT EXTÉRIEUR DE DEUX VECTEURS.

24. Définition du produit extérieur. — Étant donnés deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, qui peuvent être des grandeurs d'espèce différente, supposons adoptée une orientation de l'espace :

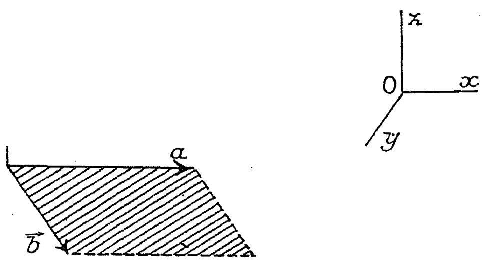
Le produit extérieur de deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ *est un vecteur* $\vec{n}$, *défini comme suit :*

1° *Sa direction est perpendiculaire au plan des vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$;

2° *Son sens est tel que le trièdre* $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\right)$ *est direct, c'est-à-dire de même sens que le trièdre de repère;*

3° *Son module est égal à la mesure de l'aire du parallélogramme construit sur* $\vec{a}$, $\vec{b}$.

En outre, si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont *parallèles*, la définition précédente ne convient plus, on admet alors que le *produit extérieur* est *nul*.



La mesure de l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$ est égale au produit des modules de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par la valeur absolue du sinus de l'angle de leurs directions. Le produit extérieur est donc une gran-

deur vectorielle, ayant pour symbole de dimensions les produits des symboles des grandeurs vectorielles à multiplier. (On a signalé la propriété analogue du produit intérieur au n° 18.) La définition du produit extérieur implique encore le choix de l'unité pour cette nouvelle espèce de grandeur : c'est le produit extérieur des unités des deux facteurs, supposés de directions perpendiculaires.

Pour représenter le produit extérieur, nous emploierons la notation de M. Burali-Forti [1]

$$\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

Le moment d'une force par rapport à un point (dont la notion fait partie du programme du baccalauréat) est un cas particulier du produit extérieur de deux vecteurs : vecteur force par vecteur longueur. Nous reviendrons plus loin sur cette notion.

Mais la notion de produit extérieur s'applique à d'autres éléments physiques assez connus; par exemple dans la deuxième loi de Laplace en électrodynamique, la force exercée sur un élément de courant $\overrightarrow{di}$ par un champ magnétique $\vec{\mathrm{H}}$ est le produit extérieur du vecteur $\vec{\mathrm{H}}$ par le vecteur $\overrightarrow{di}$, ...

25. **Propriétés du produit extérieur.** — Le produit extérieur a les mêmes propriétés que le produit intérieur, sauf toutefois pour la permutation des facteurs qui change de sens le produit (il n'est pas commutatif). Elles sont résumées dans les identités suivantes (comparer

(1) Les notations pour représenter ce produit sont également très diverses, suivant les auteurs.

L'une des plus tentantes consiste à employer les mêmes symboles (. ou ×, ou aucun signe) que pour le produit scalaire, mais à surmonter l'ensemble des deux vecteurs d'une flèche, pour rappeler que c'est, cette fois, un produit « vectoriel » :

$$\overrightarrow{\vec{a} \times \vec{b}}, \quad \overrightarrow{\vec{a} . \vec{b}}, \quad \overrightarrow{\vec{a}\, \vec{b}}.$$

C'est notamment la notation utilisée par M. Lafay dans son Cours de l'École Polytechnique, mais en employant, au lieu de la flèche, le simple trait qui lui sert à caractériser les vecteurs (note 2 du n° 2).

place l'un des facteurs par une somme, les composantes du produit sont les sommes des composantes des produits partiels.

28. **Vecteurs dans un plan orienté.** — Considérons un plan orienté, c'est-à-dire dans lequel on a choisi un sens de rotation des angles. Supposons également l'espace orienté; le plan le partage en deux régions : pour l'une qu'on peut appeler positive, le sens de rotation du plan est positif (n° 17), pour l'autre, il est négatif. (En adoptant par exemple le sens de l'analytique (*fig.* 12), le plan du cadran d'une montre sépare l'espace en deux régions, la positive devant, la négative derrière.) Nous dirons que *le vecteur unitaire* $\vec{k}$, *perpendiculaire au plan, dirigé vers la région positive, est directement perpendiculaire au plan.*

Dans le plan lui-même, on dit qu'*un axe* Iy *est directement perpendiculaire à un axe* Ix *si l'angle* (Ix, Iy) *est égal* à $+\frac{\pi}{2}$. Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs unitaires sur ces axes, le trièdre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est trirectangle direct, de sorte que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \qquad \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}.$$

Ceci posé, considérons deux vecteurs quelconques dans le plan $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Leur produit extérieur est perpendiculaire au plan, par suite est caractérisé par son rapport au vecteur $\vec{k}$, que nous appellerons sa *mesure*.

On peut donner diverses expressions de la mesure de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. D'une part, supposons ces vecteurs définis par leurs composantes (X, Y), (X', Y') par rapport à deux axes Ox, Oy directement rectangulaires dans le plan $\left[\text{angle } (Ox, Oy) = +\frac{\pi}{2}\right]$. On peut leur adjoindre un troisième axe Oz, de vecteur unitaire $\vec{k}$, par rapport auquel les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont nulles. En appliquant ce qui précède, on voit que le produit $\vec{a} \wedge \vec{b}$ a des projections nulles sur Ox, Oy, et que sa projection sur Oz, qui est par suite sa mesure, est

$$\text{mesure } (\vec{a} \wedge \vec{b}) = X.Y' - Y.X'.$$

29. **Identité de Lagrange.** — Cherchons le carré d'un produit extérieur de deux vecteurs ; c'ést le carré du module, donc d'après l'égalité précédente

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)^2 = \bar{a}^2 . \bar{b}^2 . \sin^2\theta = \bar{a}^2 . \bar{b}^2 - \left(\bar{a} . \bar{b} . \cos\theta\right)^2.$$

Mais dans le second membre l'expression entre parenthèses n'est autre que le produit intérieur de $\vec{a}$ par $\vec{b}$. L'égalité précédente s'écrit donc

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}\right)^2 . \left(\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a} . \vec{b}\right)^2.$$

Les trois premiers signes d'élévation au carré indiquent des produits de vecteurs par eux-mêmes, le dernier indique le carré d'un scalaire.

Si l'on désigne par (X, Y, Z) et (X', Y', Z') les projections sur trois axes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, les divers termes de l'égalité précédente s'expriment au moyen de ces projections. On obtient

$$\begin{aligned}(YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XY' - YX')^2 \\ = (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) - (XX' + YY' + ZZ')^2.\end{aligned}$$

Comme X, Y, Z, X', Y', Z' peuvent prendre des valeurs quelconques on a ainsi obtenu une identité algébrique, c'est l'identité connue sous le nom de Lagrange. Sa forme géométrique précédente est utile dans un certain nombre d'applications du calcul vectoriel.

30. **Division géométrique.** — Soit à trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que, $\vec{a}$, $\vec{b}$ étant donnés, on ait

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}.$$

Ce problème étant l'opération inverse d'un produit extérieur, il est naturel de l'appeler *division géométrique*.

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment *que $\vec{b}$ soit perpendiculaire à $\vec{a}$*. C'est aussi une condition suffisante. En effet, s'il en est ainsi, on obtient une première solution en prenant un vecteur $\vec{c}$, perpendiculaire au plan de $\vec{a}$, $\vec{b}$, tel que le trièdre $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ soit direct, et dont le module est le quotient du module de $\vec{b}$ par

posantes de $\vec{x}$) :

$$\begin{cases} ry - qz = l, \\ pz - rx = m, \\ qx - py = n. \end{cases}$$

Pour que le système soit compatible, il faut que l'on ait

$$pl + qm + rn = 0.$$

Cette condition est équivalente à : $\vec{a}$ perpendiculaire à $\vec{b}$. Si elle est vérifiée, le système a une infinité de solutions déduites de l'une d'elles x_0, y_0, z_0 par les formules

$$x = x_0 + \lambda p,$$
$$y = y_0 + \lambda q,$$
$$z = z_0 + \lambda r.$$

VI. — PRODUITS COMPOSÉS.

En faisant successivement deux des produits que nous venons de définir (vecteur par un scalaire, produit intérieur ou extérieur de deux vecteurs) on obtient des expressions qui présentent un certain intérêt, et permettent de condenser certaines formules et opérations analytiques.

31. **Produit** $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})$. — L'expression $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})$ ou $(\vec{b}.\vec{c}).\vec{a}$ s'entend d'elle-même : la parenthèse désigne un scalaire, produit intérieur de $\vec{b}$ par $\vec{c}$, on multiplie le vecteur $\vec{a}$ par ce scalaire.

Le vecteur $\vec{a}$ joue naturellement un rôle différent des deux autres, on peut donc seulement permuter ces derniers.

32. **Produit mixte** $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$. — L'expression

$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$$

est un scalaire, produit intérieur du vecteur $\vec{a}$ par le vecteur $\vec{b} \wedge \vec{c}$, qui est lui-même un produit extérieur. Le nom de « produit mixte » vient évidemment de la combinaison des deux espèces de produits dans la formule.

c'est-à-dire encore *de déterminer le vecteur* $\vec{u}$ *par ses composantes sur* OX, OY, OZ. Les formules du n° 34 donnent

$$\frac{\vec{u}.(\vec{J} \wedge \vec{K})}{\vec{I}.(J \wedge \vec{K})} \qquad\qquad Y = \frac{\beta}{\omega},$$

de sorte que

$$\vec{u} = \alpha . \frac{I}{\omega} + \beta . \frac{J}{\omega} + \gamma . \frac{K}{\omega}.$$

VII. — HOMOGÉNÉITÉ ET SYMÉTRIE.

Dans les paragraphes précédents nous avons parfois fait appel à quelques notions élémentaires sur les « mesures » et les « dimensions » des grandeurs scalaires et vectorielles. *Nous voudrions les préciser ici par quelques principes importants et mettre en évidence, d'une part, la relativité qui intervient dans la définition des grandeurs du fait du choix des unités* [1], *d'autre part, la relativité qui résulte du rôle joué par le choix d'une orientation de l'espace.* Dans ce paragraphe nous étudierons successivement ces deux relativités sous le nom d' « homogénéité » et de « symétrie », en embrassant à la fois le cas des grandeurs scalaires et celui des grandeurs vectorielles.

36. **Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées.** — Pour certaines espèces de grandeurs, en très petit nombre d'ailleurs (longueurs, masses, forces, temps), on peut obtenir *directement* le *rapport* de deux d'entre elles par des opérations physiques [2]. On

(1) On trouvera des précisions analogues dans la plupart des Traités de Physique et de Mécanique. (*Voir*, par exemple, le *Cours de Math. spéc.* de M. Haag, déjà cité, t. III : *Mécanique*, Chap. VIII.)

(2) On trouve la définition, plus ou moins exacte, de ce « rapport » dans tous les Traités d'Arithmétique. La définition théorique correcte ne peut pas être séparée de celle des nombres irrationnels; on la trouvera, par exemple, dans le *Traité d'Analyse* de M. Baire, t. I (Gauthier-Villars).

détermine par suite ainsi leur « mesure » (grandeurs scalaires) ou leur « module » (grandeurs vectorielles) (locution employée aux nos 3 et 4) : c'est leur rapport à une grandeur fixe, prise pour « unité ».

Mais la mesure de la plupart des grandeurs s'obtient en réalité *indirectement* par l'application de *lois* ou *formules*, d'origine physique ou géométrique. Ces lois indiquent des calculs à effectuer sur des nombres, mesures directes (ou même déjà indirectes) de certaines grandeurs A, B, C auxquelles est reliée la grandeur à mesurer G. Pour quelques grandeurs, ce procédé coexiste avec le premier (exemple : mesure d'une longueur terrestre soit directement, soit par l'intermédiaire d'une triangulation); pour d'autres, il existe seul : c'est le cas des aires, des vitesses, des travaux, etc. *Les lois ou formules constituent même parfois la définition de la grandeur.*

Lorsqu'une grandeur G est ainsi définie par une formule à partir de grandeurs A, B, C (par exemple la vitesse, quotient de l'espace par le temps), l'unité de cette espèce de grandeurs G se trouve aussi définie. Il suffit de disposer des grandeurs A, B, C de façon que le nombre qui mesure G (grandeurs scalaires), ou encore le module de G (grandeurs vectorielles), devienne égal à 1. C'est ce que nous avons déjà indiqué pour le produit intérieur (n° 18) et le produit extérieur (n° 24) de deux grandeurs vectorielles [1].

Si les grandeurs A, B, C qui servent à définir G sont indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire si l'on choisit arbitrairement leurs unités respectives, on les appelle *fondamentales;* par opposition on dit que G est une *grandeur dérivée;* de même les unités de A, B, C d'une part, de G d'autre part, sont dites fondamentales et dérivée.

Il y a, par suite, un certain arbitraire dans le choix et dans le nombre des grandeurs fondamentales. Pratiquement, pour des raisons de mémoire, on adopte presque toujours les mêmes grandeurs

---

[1] Cette définition de l'unité de G peut être réalisée ainsi de diverses façons, en faisant varier les grandeurs A, B, C et conservant toujours à la mesure de G la valeur 1. C'est ainsi que l'unité de « produit extérieur » $\vec{a} \wedge \vec{b}$ peut être définie comme le produit de deux vecteurs de modules 1 et 2 faisant entre eux un angle de 30°. Le fait que ces diverses définitions correspondent toujours à une même grandeur « réelle » constitue le postulat physique de l'existence de la grandeur. (On trouvera des considérations analogues dans HAAG, *loc. cit.*, t. III, note du n° 111, Chap. VIII.)

Si l'on a obtenu la formule de dimensions d'une grandeur G par rapport à certaines grandeurs adoptées momentanément comme fondamentales, A, B, C

$$b^{\beta}$$

et si, d'autre part, on a obtenu les formules de dimensions respectives de A, B, C par rapport à d'autres grandeurs prises *a posteriori* comme fondamentales A′, B′, C′

$$a = a'^{p}.b'^{q}.c'^{r}, \qquad b = a'^{p'}.l \qquad\qquad b'^{q''}.c'^{r''},$$

la formule de dimensions de G par rapport à A′, B′, C′ s'obtient évidemment en remplaçant a, b, c par les expressions précédentes dans la première relation

Cette propriété ne suppose pas d'ailleurs que A, B, C soient indépendantes. Elle justifie la définition de grandeurs à partir des grandeurs déjà dérivées, et montre qu'on peut adopter des grandeurs quelconques comme fondamentales, à condition toutefois qu'elles soient indépendantes.

38. **Dimensions des opérations vectorielles.** — Dans les *opérations sur les scalaires*, les formules de dimensions sont immédiates et sont résumées dans les principes suivants :

1° *Le symbole de dimensions d'un produit est le produit des symboles des facteurs;*

Le symbole de dimensions de l'inverse d'une grandeur est l'inverse du symbole de la grandeur.

Les symboles de

$$G = A.B \qquad \text{et}$$

sont

$$= a.b,$$

dans ces formules, on peut, suivant la remarque du numéro précédent, remplacer a et b par les symboles de dimensions de A, B par

rapport à d'autres grandeurs prises *a posteriori* comme fondamentales [1].

2° *Dans une somme, les termes doivent avoir le même symbole de dimensions, qui est par suite celui de la somme. Il en est de même des deux membres d'une égalité* qu'on peut considérer comme les deux termes d'une différence constamment nulle [2].

Si une égalité vérifie cette condition, on dit que *la formule est homogène;* il convient toujours de s'assurer de l'homogénéité d'une formule, lorsqu'on la sait indépendante des unités adoptées pour les grandeurs fondamentales [3].

Ces principes s'étendent immédiatement aux *opérations vectorielles* ainsi qu'on l'a déjà signalé brièvement en les définissant :

1° *Le produit d'un vecteur par un scalaire* (n° 7) *et les produits intérieur* (n° 18) *ou extérieur* (n° 24) *de deux vecteurs ont pour symbole de dimensions le produit des symboles des facteurs.*

2° *Dans une somme géométrique, les divers vecteurs ou grandeurs vectorielles à additionner doivent avoir le même symbole de dimensions qui est par suite celui de la somme. Il en est de même des deux membres d'une égalité vectorielle* (*ou équipollence*) qu'on peut en effet considérer comme les deux termes d'une différence constamment nulle.

La propriété des produits résulte de leur définition même; la propriété de la somme résulte de ce que tout changement d'unité doit amplifier dans un même rapport les divers termes de la somme ainsi que la somme elle-même.

---

(1) Ces deux premières règles s'étendent immédiatement au cas d'un quotient et d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs, c'est-à-dire encore au cas d'un monome à exposants entiers, positifs ou négatifs. Pour une puissance fractionnaire, il suffit d'écrire son égalité de définition. Si :

entre les symboles des deux grandeurs, on a la relation

$$= a^{\frac{1}{3}}.$$

(2) Il y a exception dans le cas où un certain nombre de termes de la somme ont une somme nulle; ils peuvent avoir des dimensions différentes des autres, mais on peut les supprimer sans changer la somme.

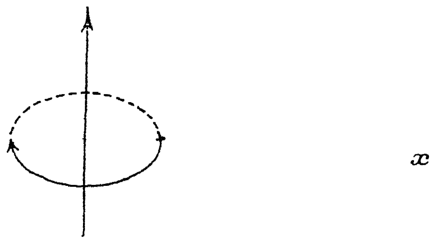
(3) En réalité, certaines formules ne vérifient pas cette propriété, c'est-à-dire

Ces propriétés s'étendent immédiatement à la « division géométrique » étudiée au n° 30 et aux produits composés du paragraphe VI.

39. **Grandeurs axiales et grandeurs polaires.** — *Une grandeur scalaire ou vectorielle est dite polaire, si sa définition et notamment son signe ou son sens sont indépendants du sens d'orientation choisi pour l'espace* (*sens du trièdre*, n° 17).

Une grandeur scalaire ou vectorielle est dite axiale lorsque son signe ou son sens changent lorsqu'on change l'orientation de

Fig. 25.



l'espace. Lorsqu'on examine si une grandeur est polaire ou axiale, on dit qu'on cherche son *axialité* ou sa *symétrie*.

On peut donc dire qu'un vecteur axial n'est pas défini uniquement par sa direction, son sens et son module mais encore par la donnée d'une axialité de l'espace, qu'on caractérise, par exemple, par un sens de rotation déterminé autour du vecteur lui-même. C'est pourquoi on représente quelquefois un vecteur axial, sur une figure (*fig.* 25), entouré d'une flèche circulaire. C'est ce qui explique aussi la notation employée par Curie, puis M. Langevin [1], qui surmontent la lettre représentant un vecteur axial d'une flèche incurvée :

encore ne sont pas homogènes; mais alors elles ne sont exactes que pour certains choix particuliers des unités. On trouve de telles formules dans les Manuels ou Aide Mémoire à l'usage des ingénieurs; elles sont déduites de formules homogènes où l'on a remplacé par leurs valeurs numériques (par rapport à un certain système d'unités) des constantes qui, en réalité, avaient des dimensions.

[1] Dans son cours de l'École Polytechnique, M. Hadamard représente également par $\vec{a}$ et $\overrightarrow{a}$ un vecteur polaire ou axial et par $\bar{a}$ un vecteur dont on n'a pas besoin de préciser s'il est l'un ou l'autre.

Comme exemple physique de « vecteur axial », citons le champ magnétique défini à partir du courant électrique : la ligne sud-nord d'un solénoïde est telle qu'un observateur placé sur cette ligne voit le courant tourner de droite à gauche ; on introduit bien une axialité : un changement de cette axialité (gauche à droite au lieu de droite à gauche) changerait le sens du champ magnétique. Comme exemple de scalaire axial, citons « le volume d'un parallélépipède construit sur trois vecteurs, donné par un produit mixte » (n° 32) : le signe de la mesure de ce volume est + ou —, suivant que le trièdre des trois vecteurs est de sens positif ou négatif.

Il faut encore remarquer que l'axialité d'un vecteur ou d'un scalaire n'est pas toujours définie de façon absolue. Dans l'exemple du champ magnétique, ce champ magnétique n'est axial qu'autant que le champ électrique est supposé polaire. En se bornant à la seule relation indiquée entre champs magnétique et électrique, on peut, sans inconvénient, supposer le champ électrique axial, auquel cas le champ magnétique est polaire.

40. **Axialité des opérations vectorielles.** — Lorsqu'une grandeur, scalaire ou vectorielle, est définie par des opérations sur d'autres grandeurs nous avons indiqué (n° 38) comment on détermine ses dimensions ; donnons des règles analogues pour reconnaître sa symétrie :

I. *Un produit de deux scalaires, ou d'un scalaire par un vecteur, ou encore un produit intérieur de deux vecteurs, est polaire si les facteurs sont en même temps ou polaires, ou axiaux ; il est axial si l'un des facteurs est polaire et l'autre axial.*

I'. *Un produit extérieur de deux vecteurs est axial si les deux facteurs sont en même temps ou polaires ou axiaux ; il est polaire si l'un des facteurs est polaire et l'autre axial.*

Ces deux premières règles résultent immédiatement des définitions des produits ; il suffit d'examiner suivant les cas l'influence du changement d'axialité de l'espace sur le scalaire ou le vecteur résultat de l'opération. Ces règles s'étendent immédiatement au cas d'un produit d'un nombre quelconque de scalaires et à celui des produits composés (§ VI).

Il convient d'ajouter que la « mesure d'un produit extérieur de deux vecteurs dans un plan orienté » est un scalaire polaire, indépendant de l'axialité de l'espace, mais changeant de signe avec l'orientation du plan.

II. *Dans une somme géométrique ou algébrique, les termes sont tous, en même temps, polaires ou axiaux et il en est de même de la somme. Il en est de même des deux membres d'une égalité scalaire ou vectorielle* qu'on peut considérer comme les deux termes d'une différence toujours nulle ([1]).

Pour établir la propriété, raisonnons par l'absurde; groupons les termes axiaux et les termes polaires dans la somme envisagée et effectuons leurs sommes partielles. Soit

$$a + b = c \qquad (a,\ b,\ c \text{ scalaires ou vecteurs})$$

ce premier résultat où a est polaire et b axial. Un changement d'orientation de l'espace remplace cette somme par

$$a - b = c'.$$

Suivant que c est lui-même polaire ou axial on a

$$0 = c - c' = (a + b) - (a - b) = 2.b,$$

Ceci prouve bien que, suivant la symétrie du résultat, la partie axiale ou la partie polaire de la somme doit disparaître.

Prenons comme exemple de ces considérations l'application donnée au n° 35 de la notion de double produit extérieur à la résolution du problème de la division géométrique. Soit à trouver le vecteur $\vec{x}$ solution de l'équation

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$$

où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont rectangulaires. Supposons ces mêmes vecteurs

([1]) Comme pour les dimensions, il y a exception à cette seconde propriété, si certains termes de la somme, groupés, ont une somme nulle; dans ce cas ils peuvent avoir une symétrie différente des autres termes; on peut d'ailleurs les supprimer dans la somme sans altérer le résultat.

CHAPITRE II.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

41. **Objet du Chapitre.** — Nous allons exposer dans ce Chapitre, en partant de la théorie précédente des vecteurs, les notions préliminaires essentielles de la Géométrie analytique : angles et distances, transformations de coordonnées, équations de droites et de plans, dans le plan et dans l'espace. Le calcul vectoriel remplace dans cet exposé l'usage du théorème de Chasles et du théorème des projections (*voir* n° 12) ; il n'y a pas à proprement parler changement de méthode, mais plutôt changement de notations. L'exposé, en tout cas, se suffit à lui-même et ne suppose aucune connaissance préalable. Les lecteurs, déjà familiarisés avec la Géométrie analytique ([1]), pourront le considérer comme un résumé rapide et un développement sur certains points. Par ailleurs certaines formules, mises sous forme vectorielle, ont un aspect suffisamment condensé et expressif, pour constituer de véritables règles mnémotechniques. Dans ce but on a rapproché souvent les expressions et formules vectorielles de leur traduction en langage analytique ordinaire.

I. — ANGLES ET DISTANCES EN GÉOMÉTRIE PLANE.

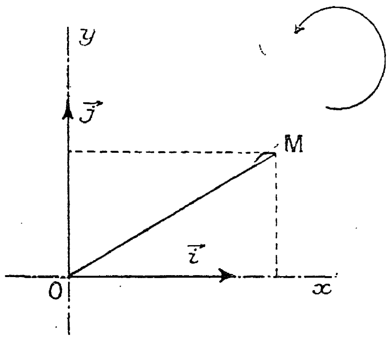
42. **Coordonnées rectangulaires.** — On considère un plan orienté et l'on se donne dans ce plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy faisant un angle $+\frac{\pi}{2}$, ou encore définissant le sens

([1]) On pourra par exemple comparer cet exposé avec celui de M. Haag (*Cours de Math. sp.*, t. II, Chap. III à VII; Gauthier-Villars) qui utilise le théorème des projections et le théorème de Chasles.

positif des angles, s'il n'a pas été choisi au préalable. Soient toujours $\vec{i}, \vec{j}$ les vecteurs unitaires sur ces axes, supposés de même longueur.

On sait ce qu'on entend par les « *coordonnées* » (x, y) d'un

Fig. 26.



point M (*fig.* 26) [1]; nous les considérerons comme étant les « *projections du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ »; elles sont donc définies par l'égalité (n° 14)

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}.$$

Ce sont encore les produits intérieurs de $\overrightarrow{OM}$ par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (n° 22) :

$$x = \overrightarrow{OM}.\vec{i}, \qquad y = \overrightarrow{OM}.\vec{j}.$$

La première coordonnée x est appelée l'*abscisse*, la seconde y l'*ordonnée*.

Si un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ou encore par les coordonnées de son origine A, soient (a, b); et de son extrémité B, soient (a', b'), on a évidemment les relations :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a' - a)\vec{i} + (b' - b)\vec{j},$$

d'où

$$\text{projections de } \overrightarrow{AB} = (a' - a,\ b' - b).$$

[1] Comme dans les Traités de Géométrie analytique, on a pris comme sens des angles sur la figure le sens inverse des aiguilles d'une montre. Dans certaines tions de Mécanique on prend le sens opposé.

Deux points M et M′ qui ont mêmes coordonnées

coïncident nécessairement; au contraire deux vecteurs qui ont mêmes projections sont seulement assujettis à être équipollents, leurs points d'application pouvant être choisis arbitrairement dans le plan.

Pour le repérage des vecteurs la *direction* et le *sens* des axes de coordonnées interviennent seuls : on ne change pas les projections d'un vecteur en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes. Au contraire, pour repérer les points par leurs coordonnées il est essentiel de fixer l'origine O des axes (¹).

43. **Distance de deux points.** — Soit un vecteur $\vec{a}$ de projections (X, Y); on a vu (n° 21) que le carré de sa longueur est égal à son produit intérieur par lui-même

$$l^2 = \vec{a}.\vec{a} = (\vec{a})^2 = X^2 + Y^2.$$

En appliquant cette remarque au cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par son origine A de coordonnées (a, b) et son extrémité B de coordonnées (a', b'), on obtient (²) l'expression du *carré de la distance des deux points* A *et* B

$$\overline{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = (a'-a)^2 + (b'-b)^2.$$

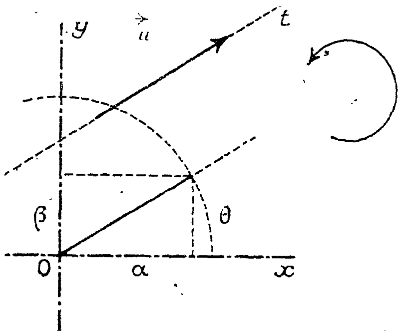
4. **Détermination d'une demi-droite ou droite dirigée.** — Pour

(¹) On définirait d'une façon analogue des « coordonnées obliques » en utilisant des axes Ox, Oy non rectangulaires. Les formules d'angles et distances sont plus compliquées et elles sont maintenant délaissées dans l'enseignement des classes de *Spéciales*. L'emploi des coordonnées obliques y semble réservé aux questions dites projectives. Il est possible que le développement du Calcul Tensoriel redonne un nouvel intérêt à l'étude des questions métriques en coordonnées obliques.

(²) On pourra comparer ceci avec le raisonnement du n° 23 sur la relation entre sinus et cosinus d'un angle. Les diverses formules ainsi obtenues pourraient se déduire naturellement de la simple application du théorème de Pythagore; on peut aussi considérer que cette façon de les établir constitue une démonstration du dit théorème (cette démonstration ne diffère d'ailleurs que par la forme de la démonstration classique des Traités de Géométrie).

repérer une demi-droite ou droite dirigée It (1), on se donne en général les projections α, β du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par It, que l'on appelle *cosinus directeurs* ou *paramètres directeurs principaux* de la droite dirigée. Les propriétés suivantes sont alors évidentes :

Fig. 27.



1° La condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres (α, β) soient les cosinus directeurs d'une droite dirigée est que

2° Les nombres α et β s'expriment en fonction des angles des axes avec la droite dirigée

$\alpha = \cos\theta,$) $[\theta = (Ox,$

ou encore

$)x, It),$

cette dernière propriété justifie le nom de cosinus directeurs. Les cosinus directeurs sont des rapports de longueurs, donc des grandeurs sans dimension.

(1) La donnée d'une « demi-droite » est équivalente à celle d'une droite dirigée ou d'un axe (*voir* la définition au n° 6); parce que, par une convention implicite, on choisit toujours sur une demi-droite un sens positif qui est celui d'un mobile se déplaçant, sur la demi-droite, de l'origine vers l'infini. Nous considérons les trois locutions « demi-droite », « droite dirigée », « axe » comme synonymes et les employons indifféremment, en notant cependant une légère nuance : le mot « axe » paraît plus spécialement réservé aux droites servant de repère (axes de coordonnées), ou encore aux droites autour desquelles on a défini un sens positif de rotation.

4° Le rapport des cosinus directeurs d'une direction prise sur la droite

$$m = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(-\beta)}{(-\alpha)}.$$

L'angle de deux droites (D) et (D′) de coefficients angulaires m, m' n'est plus défini qu'à un multiple de π près, dans le plan orienté. Sa tangente est définie; on l'obtient en fonction de m, m' en partant de l'expression du numéro précédent et en divisant haut et bas par $\alpha.\alpha'$ de façon à introduire les coefficients angulaires :

$$\text{tang}(D, D') =$$

On en déduit la condition de *perpendicularité* [tang(D, D′) = :

$$\cdot\, mm' = 0.$$

47. Paramètres directeurs d'une droite. — On appelle *paramètres directeurs* d'une droite ou d'un faisceau de droites parallèles, les composantes (p, q) d'un vecteur quelconque, placé sur la droite ou sur l'une des droites du faisceau.

Les paramètres directeurs ne sont pas entièrement définis : deux systèmes de paramètres directeurs (p, q), (p', q') d'une même droite ou de deux droites parallèles sont proportionnels et réciproquement (n° **15**).

On peut encore dire que *les paramètres directeurs ne sont définis qu'à un « facteur près de proportionnalité »*. Il s'ensuit que, toute relation entre paramètres directeurs, exprimant une relation géométrique entre droites doit être *homogène* (c'est-à-dire ne pas changer si l'on multiplie les paramètres d'une des droites par un même facteur).

Par exemple, pour deux droites (D), (D′) de paramètres (p, q), (p', q') :

condition de *parallélisme :*

condition de *perpendicularité :*

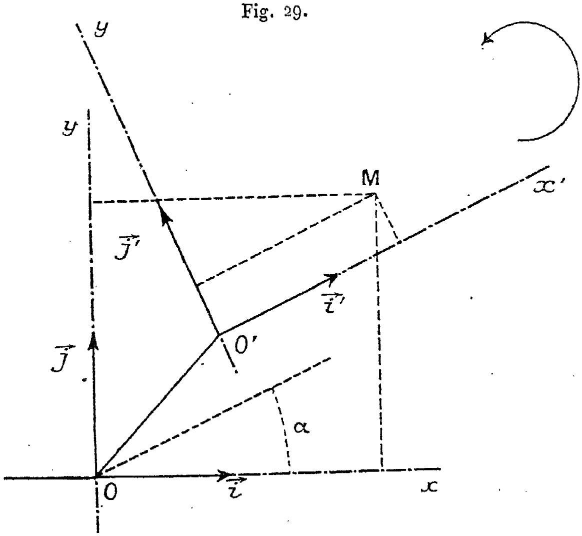
Le coefficient angulaire est, naturellement, le quotient des paramètres directeurs,

Enfin les « paramètres directeurs principaux » (α, β) d'une droite dirigée It constituent un système particulier de paramètres directeurs de la droite non dirigée (D) portant It; tout autre système (p, q) de paramètres directeurs de (D) lui est proportionnel; (α, β) étant les projections du vecteur unitaire $\vec{u}$ de It, (p, q) les projections d'un vecteur quelconque $\vec{a}$ porté par (D), le rapport de proportionnalité est égal à la mesure de $\vec{a}$ par rapport à $\vec{u}$, c'est-à-dire (au signe près) à la longueur de $\vec{a}$,

II. — CHANGEMENT D'AXES EN GÉOMÉTRIE PLANE.

3. **Énoncé du problème.** — On se donne, dans un plan orienté,

Fig. 29.



deux systèmes d'axes *directement* rectangulaires Ox, Oy, et

immédiates [1] :

$$X = \rho . \cos\theta, \qquad Y = \rho . \sin\theta,$$

ou

$$\tang\theta = \frac{Y}{X}, \qquad \rho = \frac{X}{\cos\theta} = \frac{Y}{\sin\theta}.$$

51. **Coordonnées polaires d'un point.** — Les coordonnées polaires d'un point M sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$, soient (ρ, θ); ρ s'appelle le *rayon vecteur* et θ l'*angle polaire* du point M. Il y a donc encore une double infinité de systèmes de coordonnées d'un point; on peut ajouter à θ un multiple quelconque de 2π en conservant la valeur de ρ, ou bien lui ajouter un multiple impair de π, à condition de prendre l'opposé de ρ.

Les relations avec les coordonnées rectangulaires, par rapport au système associé, sont de même :

$$x = \rho . \cos\theta, \qquad y = \rho . \sin\theta;$$

ou

$$\tang\theta = \frac{y}{x}, \qquad \rho = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta}.$$

52. **Produits intérieur et extérieur de deux vecteurs.** — Deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{a}'$ d'un plan orienté étant définis par leurs coordonnées polaires (ρ, θ), (ρ', θ'), leur produit intérieur a pour expression

$$\vec{a} . \vec{a}' = \rho\rho' \cos(\theta' - \theta).$$

Si l'on désigne par $\vec{k}$ le vecteur unitaire normal au plan du côté positif, leur produit extérieur a pour valeur

$$\vec{a} \wedge \vec{a}' = [\rho\rho' \sin(\theta' - \theta)]\vec{k}.$$

Sa mesure $\left(\text{par rapport à } \vec{k}\right)$ est donc le nombre entre crochets.

---

(1) Le premier groupe de formules montre bien que X, Y sont définis complètement lorsqu'on se donne ρ et θ.

Dans le second groupe, la première formule ne définit θ qu'à un multiple près de π, c'est-à-dire encore laisse le choix entre deux systèmes de déterminations :

[illegible]

A chacun de ces systèmes correspond une seule valeur de ρ, définie par la seconde formule, et ces deux valeurs de ρ sont opposées.

53. **Distances et aires.** — Soient deux points M, M′ de coordonnées polaires (ρ, θ), (ρ', θ') et de coordonnées rectangulaires (x, y), (x', y'). On obtient immédiatement le carré de leur distance :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OM}'}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \qquad \cdot(\overrightarrow{\mathrm{OM}})^2 - 2.\overrightarrow{\mathrm{OM}'}.\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$$\rho'^2 - 2\rho.\rho'\cos(\theta'-\theta).$$

On peut de même chercher l'aire du triangle OMM′. En l'affectant du signe + ou du signe — suivant que le rayon vecteur qui la balaie, en allant de M vers M′, tourne dans le sens positif ou négatif, cette aire est la demi-mesure par rapport au vecteur $\vec{k}$ du produit extérieur $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}'}$. Donc, d'après ce qui précède [1] :

$$\text{Aire OMM}' = \frac{1}{2}\rho\rho'.\sin(\theta'-\theta) = \frac{1}{2}(xy' -$$

IV. — ANGLES ET DISTANCES EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

54. **Coordonnées rectangulaires.** — On se donne trois axes formant un trièdre trirectangle, de sens direct, ou encore définissant le sens direct si on ne l'a pas choisi au préalable.

On désigne toujours par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires sur ces axes, supposés de même longueur.

Les coordonnées (x, y, z) d'un point M sont encore les « projections du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ », c'est-à-dire sont définies par l'égalité (n° 14)

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = .$$

ou encore (n° 22)

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\ \vec{} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}}.\vec{i},$$

Les nombres x, y sont encore appelés l'abscisse et l'ordonnée (ce

---

[1] On peut vérifier l'égalité des deux expressions en coordonnées polaires et cartésiennes par les formules de passage et en développant au préalable $\sin(\theta'-\theta)$. Elle résulte aussi, bien entendu, de la double expression de la mesure du produit extérieur en coordonnées polaires (n° 52) et en coordonnées rectangulaires (n° 28).

dirigée, on les désigne respectivement sous le nom de *longitude* pour φ et de *colatitude* pour θ (¹).

Il est visible que la donnée des deux angles (φ, θ) entraîne celle d'une droite dirigée; réciproquement à une droite dirigée correspondent deux systèmes de tels angles, suivant le sens choisi sur la projection de l'axe pour définir Ot'; ce sont :

$$(\varphi, \theta) \quad \text{et} \quad (\varphi + \pi, -\theta).$$

On obtient immédiatement les relations entre les angles polaires et les cosinus directeurs; en appelant $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ les vecteurs unitaires sur les directions Ot, Ot', on a la suite d'égalités évidentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} ; = u'.\sin\theta + k.\cos\theta, \\ \vec{u'} = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi, \end{array} \right.$$

d'où

$$\vec{u} = \vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}\sin\varphi\sin\theta + \vec{k}\cos\theta.$$

58. **Angle de deux droites dirigées.** — Soient deux droites dirigées $\mathrm{I}t$, $\mathrm{I}'t'$ de vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{u'}$, de cosinus directeurs (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et soit V leur angle; il n'est plus défini qu'au signe près :

$$(\mathrm{I}t, \mathrm{I}'t') = :$$

Son cosinus est seul défini ($\sin V$ et $\mathrm{tang}\, V$ ne sont définis qu'en valeur absolue). On a immédiatement

$$= \vec{u}.\vec{u'}, \qquad \cos V = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

On en déduit encore :

(¹) On peut encore définir la colatitude l'angle :

$$\theta' = (Ot, Oz)$$

mais à condition de prendre comme sens positif des angles dans ce plan celui de Ot' vers Oz.

Les dénominations de longitude et colatitude sont empruntées à la Cosmographie. Lorsqu'on prend pour Ot' la projection même de Ot, l'angle θ est compris entre 0 et $+\pi$.

Conditions de *parallélisme* (n° 15) :

$$\alpha \qquad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'};$$

Condition de *perpendicularité* ($\cos V = 0$):

Pour le parallélisme, la valeur commune des rapports est nécessairement $+1$ (si les demi-droites sont de même sens) ou -1 (dans le cas contraire).

Soient enfin deux demi-droites It, It' *rectangulaires* $(\vec{u}.\vec{u}' = 0)$; cherchons les cosinus directeurs de la demi-droite It'', *directement perpendiculaire aux deux autres* [c'est-à-dire telle que le trièdre (It, t', t'') soit trirectangle direct]. Si $\vec{u}''$ est le vecteur unitaire de projections α'', β'', γ'', pris sur It'', on a (n° 27)

$$\vec{u}'' = \vec{u} \wedge \vec{u}',$$

$$\gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Si les deux directions primitives n'étaient pas rectangulaires, ces formules donneraient les composantes d'un vecteur, non unitaire, de mesure égale au sinus de l'angle de It avec It'; il serait toutefois encore directement perpendiculaire au plan défini par les deux directions (le trièdre It, t', t'' ne serait plus que birectangle, mais toujours direct).

59. **Paramètres directeurs.** — Pour une droite non dirigée, il n'y a plus de notion analogue au coefficient angulaire, mais la notion de paramètres directeurs s'étend, sans modifications :

On appelle *système de paramètres directeurs* d'une droite ou d'un faisceau de droites parallèles, les projections p, q, r d'un vecteur quelconque porté par l'une des droites.

Les *paramètres directeurs d'une droite ne sont définis qu'à un facteur près de proportionnalité;* toute relation en p, q, r doit être « homogène » :

données deux droites de paramètres directeurs (p, q, r), q', r'), on a encore les conditions :

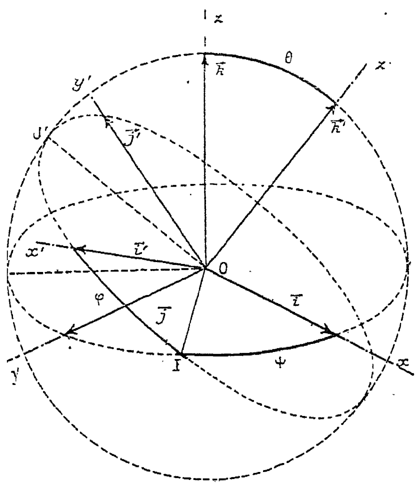
Montrons que ces angles suffisent pour déterminer la position du second trièdre, à partir du premier : soient toujours $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ les vecteurs unitaires sur les deux trièdres; nous avons appelé $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ le vecteur unitaire sur la ligne des nœuds; désignons encore par $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}'}$ des vecteurs unitaires directement perpendiculaires à $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ dans les plans $\mathrm{O}xy$, $\mathrm{O}x'y'$; on constitue ainsi deux nouveaux trièdres directs :

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OJ}}, \quad \vec{k}; \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OJ}'}, \quad \vec{k}'. \tag{3}$$

On passe du trièdre primitif $(\vec{i}, j, k)$ à (2) par une rotation d'angle ψ autour de l'axe $\mathrm{O}z$. On passe de (2) à (3) par une rota-

Fig. 34.



tion d'angle θ autour de l'axe OI obtenu par la rotation précédente. On passe de (3) au trièdre final $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par une rotation d'angle φ autour de l'axe $\mathrm{O}z'$, obtenu par la rotation précédente.

---

du centre O au point vernal γ; φ diminue de 2π dans un jour sidéral (rotation propre); ψ varie très lentement (précession des équinoxes), toujours dans le même sens; θ, inclinaison de l'écliptique, oscille autour d'une valeur moyenne d'environ 23° 27′.

Donc on peut prendre pour ces trois angles des valeurs arbitraires et leur donnée suffit à fixer la position du second trièdre à partir du premier.

Il y a encore lieu de faire quelques observations :

1° Pour retenir l'ordre des côtés dans la définition des angles, on peut remarquer que, pour chacun d'eux, on va du premier trièdre vers le second.

2° On a pris un sens arbitraire sur la ligne des nœuds ; si l'on change ce sens, l'orientation du plan Ozz' change en même temps, θ change de signe ; quant à φ et ψ, angles partant ou aboutissant à OI dans des plans orientés, ils augmentent de π. Il y a donc deux systèmes d'angles d'Euler pour un même trièdre :

$$\begin{array}{ll} \psi + 2k\pi, & \psi + \pi + 2k\pi, \\ \theta + 2k\pi, & -\theta + 2k\pi, \end{array}$$

3° Nous avons supposé que les deux plans Oxy, $Ox'y'$ se coupaient suivant une seule droite ; s'ils sont confondus, il en est de même de Oz, Oz'. On peut alors prendre OI arbitrairement, θ est nul ; ψ et φ ne sont définis qu'à une même constante additive et soustractive près :

$$\psi + \lambda, \qquad \theta = 0, \qquad \varphi - \lambda ;$$

on peut encore dire que la somme $\psi + \varphi = \alpha$ est seule définie et qu'on passe du premier trièdre au second par une rotation d'angle α autour de Oz.

4° Échangeons le rôle des trièdres, c'est-à-dire faisons jouer à Ox', y', z' le rôle de premier trièdre et à Ox, y, z le rôle de second trièdre. Conservons le même sens sur la ligne des nœuds ; nous pouvons définir les nouveaux angles d'Euler :

$$\varphi_1 = (\mathrm{OI},\ Ox) ;$$

ils sont donc liés aux anciens par les relations

$$\psi_1 = -\varphi, \qquad \theta_1 = -\theta, \qquad \varphi_1 = \cdot$$

de la ligne des nœuds) en remplaçant θ, ψ, φ respectivement par $-\theta$, $-\varphi$, $-\psi$; dans le tableau les lignes s'échangent effectivement avec les colonnes, c'est-à-dire que $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ échangent bien leur rôle avec $\vec{i'}$, $\vec{j'}$,

VI. — ÉQUATION D'UNE DROITE DANS UN PLAN.

65. **Équation d'une courbe.** — On sait que l'équation d'une courbe (C), dans un plan, est une relation entre les coordonnées d'un point M, nécessaire et suffisante pour que le point M soit sur (C). Ceci est vrai pour tout système de coordonnées, de sorte que l'on distingue « l'équation cartésienne » (axes de coordonnées rectangulaires ou obliques), « l'équation polaire » (coordonnées polaires), etc.; il est également naturel de considérer l'*équation vectorielle* (¹), vérifiée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$. On définit de même l'équation d'une surface dans l'espace et les équations d'une courbe. Quelle que soit l'espèce d'équation envisagée, on est toujours amené à considérer deux problèmes, réciproques l'un de l'autre, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique :

1° Étant donnée une courbe (ou une surface), trouver une équation [ou des équations (cartésienne, polaire, vectorielle)] représentant la courbe (ou la surface).

2° Étant donnée une équation [ou plusieurs (cartésienne, polaire, vectorielle, etc.)], trouver la courbe (ou la surface) qu'elle représente, si toutefois elle existe.

Il est bon de remarquer que la locution courante « l'équation d'une courbe » est légèrement impropre. Il y a une infinité d'équations pouvant représenter une même courbe. Par exemple l'axe des y peut être représenté par $x = 0$, mais aussi par $a.\ x = 0$ ou $x^2 = 0$, ou encore $e^x - 1 = 0$, ... De sorte qu'une question supplémentaire est de chercher la condition pour que deux équations représentent une même courbe.

Remarquons encore que l'on étudie rarement une courbe ou une

(¹) Ce point de vue sera développé plus longuement dans les Chapitres III et IV.

équation isolée, mais plutôt des familles de courbes ou des types d'équations. Il entre alors des paramètres dans les équations et il y a lieu d'en chercher la signification géométrique.

66. **Droites et équations linéaires.** — On considère un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy; on désigne toujours par $\vec{i}, \vec{j}$ les vecteurs unitaires sur les axes et par $\vec{k}$ le vecteur unitaire perpendiculaire au plan dans le sens positif $\left[\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \text{direct}\right]$. Soient enfin x, y les coordonnées d'un point M. Les deux problèmes indiqués ci-dessus conduisent, pour le cas d'une droite, au double énoncé bien connu :

Une droite (D) *peut être représentée par une équation linéaire* (*ou du premier degré*) *en* x, y

$$+ vy + w = 0,$$

et, réciproquement, toute équation linéaire en x, y *de la forme précédente représente une droite.*

On peut donner de cet énoncé deux démonstrations (suivant les Traités, on trouve l'une ou l'autre), qui conduisent à des interprétations différentes des coefficients, et qui, par suite, ont chacune leur intérêt propre. Ces deux démonstrations deviennent presque immédiates si l'on passe par l'intermédiaire de l'équation vectorielle (et dans la pratique, on y passe plus ou moins explicitement) : c'est à ce titre que nous allons nous en occuper ici.

Nous verrons aussi plus loin que l'existence de ces deux démonstrations provient de ce que l'on peut considérer une droite dans le plan donné soit comme la trace d'un autre plan, soit comme une position particulière d'une droite de l'espace.

67. **Méthode du produit intérieur.** — 1° Soient une droite (D) passant par un point A de coordonnées (x_0, y_0) et un vecteur $\vec{n}$, de projections (u, v), *perpendiculaire* à (D),

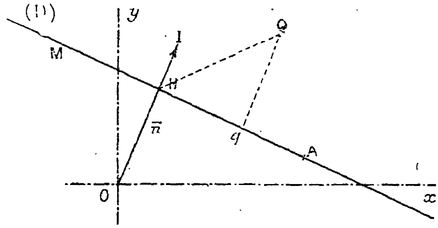
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} : \qquad \vec{\ },$$

$$\vec{n} = u\,.\,\vec{i} + \ldots$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit sur (D) est que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ vérifie l'équation vectorielle

(1) $$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = \vec{n}.\overrightarrow{OA},$$

Fig. 35.



ou encore l'équation cartésienne du premier degré

(I′) $$ux + vy + w = 0$$

obtenue en remarquant que (n° 22)

$$\vec{n}.\overrightarrow{OM} =$$

et en posant

$$\vec{n}.\overrightarrow{OA} =$$

2° Soit, réciproquement, une équation du premier degré

$$ux + vy + w = 0 \qquad (u \text{ ou } v \text{ non nul}).$$

Le lieu des points M, dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation, est identique au lieu des points M vérifiant l'équation vectorielle

$$\vec{n}.\overrightarrow{OM} + w = 0, \qquad \vec{n} = u.\vec{i} + v.\vec{j};$$

c'est par suite la droite (D), perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$, et passant par le point H, défini comme suit :

on mène $\overrightarrow{OI}$ équipollent à $\vec{n}$ et l'on prend sur cette droite le point H tel que

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OI} = -w.$$

On peut ajouter que, si x, y sont les coordonnées d'un point Q

de la distance d'un point à la droite devient alors

$$\overline{qQ} = x.\cos\alpha + y.\sin\alpha + \varpi.$$

Une droite a deux équations normales correspondant à α et $\pi + \alpha$.

70. **Équation polaire.** — L'une ou l'autre des équations vectorielles (I) et (II) se traduit immédiatement en coordonnées polaires (nº 50). Soient Ox l'axe polaire, r et α les coordonnées du vecteur $\vec{n}$; ρ, θ les coordonnées polaires d'un point M. En se reportant aux formules du nº 52, on voit que l'équation (I) est équivalente à

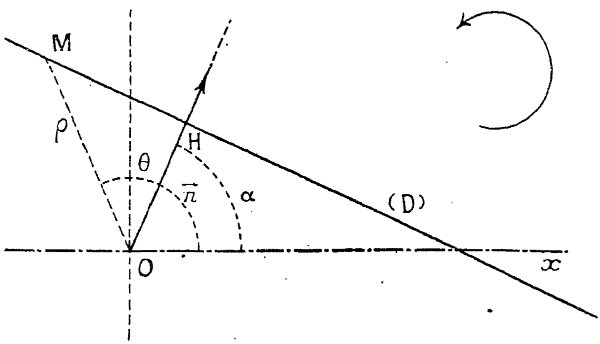
$$r.\rho.\cos(\theta - \alpha) = \vec{n}.\vec{OA}$$

ou encore

$$\rho.\cos(\theta - \alpha) = p;$$

p est une constante, d'ailleurs égale à $\overline{OH}$, distance de l'origine à la droite, mesurée sur la demi-droite d'angle polaire α.

Fig. 37.



On aurait pu naturellement obtenir cette équation en partant de l'équation cartésienne et utilisant les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires (nº 51). En développant le cosinus de la différence, on peut encore l'écrire sous la forme

$$\rho = \frac{\;}{a.\cos\theta + b.\sin\theta},$$

et réciproquement.

d'équations est le *système d'équations des plans projetant la droite.*

75. Intersection de deux plans. — Soient deux plans représentés par les équations vectorielles

$$\vec{\ }\ \overrightarrow{OM}$$

Supposons les deux plans non parallèles : il suffit que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne le soient pas; ils se coupent alors suivant une droite, dont nous nous proposons de trouver l'équation vectorielle sous la forme précédente (II_e).

Le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ parallèle aux deux plans est parallèle à leur droite d'intersection, dont l'équation est par suite de la forme

$$\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{n}') = \vec{b},$$

$\vec{b}$ étant un vecteur constant, à déterminer. Il suffit pour cela de développer le premier membre suivant la formule du n° 35 :

$$\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{n}') = \vec{n}.\,(\overrightarrow{OM}.\vec{n}') - \vec{n}'.\,(\overrightarrow{OM}.\vec{n}).$$

Le point M appartenant aux deux plans, chacune des parenthèses est constante, d'après les équations de ces plans, et l'on obtient finalement l'équation de la droite

$$\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{n}') = \vec{n}'.s - \vec{n}.s'.$$

On traduira aisément ceci en langage cartésien, et l'on pourra comparer les formules avec celles qu'on déduirait des formules de résolution des systèmes d'équations linéaires.

VIII. — REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE.

76. Définition paramétrique d'une courbe. — Pour étudier une courbe, lieu d'un point M, dans un plan ou dans l'espace, il y a sou-

des deux vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$. On sait d'après une discussion classique qu'à un point de (D) correspond une seule valeur de ρ et inversement, exception faite de $\rho = 1$ auquel correspond le point à l'infini de la droite. La définition de ρ se traduit par l'égalité

$$\overrightarrow{MA} = \rho.\overrightarrow{MB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = \rho.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}),$$

d'où, en résolvant par rapport à $\overrightarrow{OM}$,

$$\mathrm{OM} \quad \frac{\overrightarrow{OA} - \rho.\overrightarrow{OB}}{1 - \rho}.$$

On en déduira immédiatement les expressions des coordonnées.

Réciproquement, si $\overrightarrow{OM}$ est une fonction homographique de cette forme

$$\mathrm{OM} = \frac{\vec{a} - \vec{b}.\rho}{1 - \rho}$$

le lieu de M est manifestement une droite, passant par les points A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ et ρ est le rapport des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

CHAPITRE III.

FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE SCALAIRE.

I. — DÉRIVÉE GÉOMÉTRIQUE D'UN VECTEUR.

79. **Définition d'une fonction vectorielle.** — *On dit qu'une fonction vectorielle* $\vec{a}$ *d'une variable scalaire* t *est définie dans un intervalle* (t_0, t_1), *s'il existe une règle faisant correspondre à toute valeur de* t *comprise dans cet intervalle une « détermination » du vecteur* $\vec{a}$, *définie par sa direction, son sens et son module, c'est-à-dire encore à une équipollence près.*

Pour représenter une fonction vectorielle $\vec{a}$ et plus spécialement ses déterminations pour diverses valeurs t_2, t_3, ..., t de la variable nous écrirons, par analogie avec la notation habituelle des fonctions scalaires,

$$\vec{\ } \qquad \vec{\ }(t_3), \quad \ldots, \quad \vec{a}(t).$$

La donnée du vecteur entraîne celle de ses projections sur trois axes de repère; donc, si l'on a défini une fonction vectorielle d'une variable, et si l'on rapporte l'espace à trois axes de coordonnées, les projections de la fonction vectorielle sur ces axes sont des *fonctions simultanées* de t.

80. **Limites et continuité.** — *On dit que le vecteur variable* $\vec{a}(t)$ *a pour limite* $\vec{a}_0$, *lorsque* t *tend vers* t_0, *si à tout nombre positif arbitrairement petit* ε, *il est possible de faire correspondre un nombre* η *également positif, tel que l'inégalité*

entraîne

$$a(t) - a_0 \,| < \varepsilon.$$

On dit, comme pour les fonctions scalaires, que $\vec{a}(t) - \vec{a}_0$ est *infiniment petit en même temps que* $t - t_0$, ou que ces deux différences vectorielle et scalaire sont infiniment petites simultanées.

Une fonction vectorielle est « continue » pour la valeur t_0, *si sa valeur* $\vec{a}(t_0)$ *pour* $t = t_0$ *est précisément « équipollente » à sa limite lorsque t tend vers* t_0.

Nous n'étudierons que des *fonctions vectorielles continues pour toutes les valeurs de certains intervalles* et pouvant être exceptionnellement discontinues aux limites de ces intervalles.

Si l'on considère des fonctions vectorielles et scalaires, simultanées d'une même variable, les diverses opérations définies au Chapitre I (produit par un scalaire, somme, produit intérieur ou extérieur de deux vecteurs) permettent d'en déduire d'autres fonctions simultanées (vectorielles ou scalaires) qui sont des *fonctions composées*. On vérifie aisément que si les premières fonctions ont des limites pour $t = t_0$, les fonctions composées ont aussi des limites, déduites des précédentes par les opérations qui ont donné ces fonctions (¹).

Si

$$\vec{b}(t) \to \vec{b}_0,$$

on a

$$\vec{a}(t) \cdot$$

$$\vec{a}(t) \times \vec{\ } \qquad : b_0,$$

$$\vec{a}(t) \wedge b(\qquad \vec{\ }$$

Démontrons par exemple la propriété pour le cas du produit d'un vecteur par un scalaire. La différence géométrique

$$\alpha(t).\vec{a}(t) - \alpha_0.\vec{a}_0$$

(¹) La flèche remplace la périphrase : « a pour limite lorsque t tend vers t_0 ».

peut s'écrire :

$$[\alpha(t) - \alpha_0].[\vec{a}(t) - \vec{a}_0] + \alpha_0.[\vec{a}(t) - \vec{a}_0] + [\alpha(t) - \alpha_0].\vec{a}_0,$$

comme on le vérifie facilement en développant le produit. Les deux différences du second membre ont, par hypothèse, pour limite o, lorsque t tend vers t_0 ; c'est dire que, quels que soient ε', ε'' positifs, on peut trouver des nombres positifs η', η'' tels que les inégalités

entraînent

$$) - \alpha_0 |$$

Comme d'autre part le module d'une somme géométrique est au plus égal à la somme des modules de ses termes (n° 8), on en déduit une limite supérieure pour le module de la différence géométrique envisagée

Or un nombre positif ε étant donné, aussi petit que l'on veut, on peut toujours trouver des nombres positifs ε', ε'' tels que

$$\varepsilon'.\varepsilon'' + |\alpha_0|.\varepsilon'' + \varepsilon'.|\vec{a}_0| < \varepsilon.$$

Soient η' et η'' les nombres qui leur correspondent et η un nombre inférieur à η' et η''; il résulte des calculs précédents que l'inégalité

$$|t - t_0| < \eta$$

entraîne

Par suite le produit $\alpha(t).\vec{a}(t)$ a bien pour limite $\alpha_0.\vec{a}_0$ lorsque t tend vers

Des résultats relatifs aux limites on déduit, en partant de la définition de la continuité que :

Si plusieurs fonctions simultanées, scalaires et vectorielles, sont continues, pour une valeur de la variable, il en est de même des fonctions composées qu'on en déduit par une suite quelconque des opérations définies au Chapitre I.

de la variable t, par exemple « *graduer la courbe en t* ». Il peut se faire d'ailleurs qu'à un même point de la courbe correspondent plusieurs valeurs de t, de sorte que dans la variation de t la courbe ou une de ses portions est décrite plusieurs fois; on dit alors que la *définition ou représentation paramétrique est « impropre »*. Comme exemple, dans la représentation de la droite du n° 77, remplaçons λ par t^2, nous obtenons la fonction [1]

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \vec{a}.t^2.$$

Lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M reste toujours sur la droite, menée par A parallèlement à $\vec{a}$, mais il ne décrit que la demi-droite d'origine A dont le sens est celui de $\vec{a}$. Elle est en outre décrite deux fois : de l'infini à A lorsque t varie de $-\infty$ à o, de A à l'infini lorsque t va de o à $+\infty$.

Inversement, étant données une courbe, lieu d'un point M, et une correspondance entre ce point M et une certaine variable t, on peut regarder la courbe comme l'hodographe du vecteur variable $\overrightarrow{OM}$, fonction de la variable t.

A ce double point de vue, l'hodographe sert à illustrer l'étude des fonctions vectorielles; l'étude d'une courbe peut inversement se remplacer par celle d'une fonction vectorielle.

82. Dérivée d'un vecteur; ligne d'action et mesure du vecteur dérivé. — Étant données une fonction vectorielle $\vec{a}(t)$ et une valeur déterminée t_0 de la variable t, le vecteur

$$\frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0}$$

est bien déterminé (quotient d'une différence géométrique par un scalaire non nul), il dépend de la valeur de t, et peut avoir une limite lorsque t tend vers t_0; si cette limite existe, c'est par définition le *vecteur dérivé* ou la *dérivée* de la fonction vectorielle

(1) La fonction homographique (n° 78) : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}t^2}{1 + t^2}$ donne un exemple de représentation impropre d'un segment.

et d'appliquer au second membre la règle de la limite du produit d'un scalaire par un vecteur (n° 80).

La règle est également immédiate en interprétant la dérivée sur l'hodographe. Le changement de variable ne change pas l'hodographe, donc ne change pas non plus la tangente ni son vecteur unitaire $\vec{u}$ dans le sens des arcs croissants. Seule est changée la mesure de la dérivée sur la tangente à l'hodographe et elle devient

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta};$$

elle est bien multipliée par $\frac{dt}{d\theta}$.

85. **Différentielles premières.** — Quand on considère simultanément diverses fonctions, vectorielles et scalaires, d'une même variable, si l'on change de variable, toutes les dérivées, vecteurs et scalaires, sont, d'après ce qui précède, multipliées par un même facteur scalaire, dérivée de l'ancienne variable par rapport à la nouvelle. Il arrive parfois qu'on n'attache pas une grande importance au choix de la variable, mais plutôt à la succession des systèmes de valeurs des diverses fonctions. On utilise alors les différentielles au lieu des dérivées :

Étant données plusieurs fonctions, vectorielles et scalaires, d'une même variable, $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., f, g, ..., on appelle système de différentielles de ces fonctions, des vecteurs et des nombres proportionnels à leurs dérivées : on les représente par $d\vec{a}$, $d\vec{b}$, ..., df, dg, ..., de sorte que

(λ facteur scalaire arbitraire).

Ceci a lieu pour une même valeur de la variable, ou, ce qui revient au même, pour un système déterminé de valeurs correspondantes des diverses fonctions.

par rapport à θ, et leurs expressions par rapport aux dérivées par rapport à t. Dans le produit de la parenthèse (pour la première expression indiquée), il ne reste plus, après suppression des termes nuls, que des termes en

$$\vec{a}''_{t^2} \wedge \vec{a}'''_{t^3}, \qquad \vec{a}''_{t^2} \wedge \vec{a}'_{t}, \qquad \vec{a}'_{t} \wedge \vec{a}'''_{t^3}.$$

Les deux derniers étant des vecteurs perpendiculaires à $\vec{a}'_t$ disparaissent dans la multiplication intérieure par ce dernier vecteur.

Le déterminant formé avec les différentielles de trois fonctions scalaires simultanées :

$$\begin{vmatrix} df & dg & dh \\ d^2 f & d^2 g & d^2 h \\ d^3 f & d^3 g & d^3 h \end{vmatrix}$$

est encore invariant. Ce n'est d'ailleurs que le produit mixte précédent, si l'on considère f, g, h comme les composantes d'un même vecteur sur trois axes rectangulaires (1).

Indiquons un dernier résultat : *si les $p - 1$ premières différentielles d'une fonction* (vectorielle ou scalaire), $\vec{a}$ par exemple, *sont nulles, la $p^{\text{ième}}$ est définie au facteur scalaire λ^p près;* c'est-à-dire encore que son quotient par la puissance p d'une différentielle scalaire non nulle $(df)^p$ est déterminé.

Effectivement prenons les dérivées successives de $\vec{a}$ par rapport à t et θ en continuant la règle utilisée pour les trois premières, sans avoir besoin d'expliciter les termes : les dérivées par rapport à θ étant des fonctions linéaires et homogènes des dérivées successives par rapport à t, si les $p - 1$ premières dérivées par rapport à t sont nulles, il en est de même des $p - 1$ premières dérivées par rapport à θ; en outre dans l'expression de la $p^{\text{ième}}$, il ne reste que le premier terme :

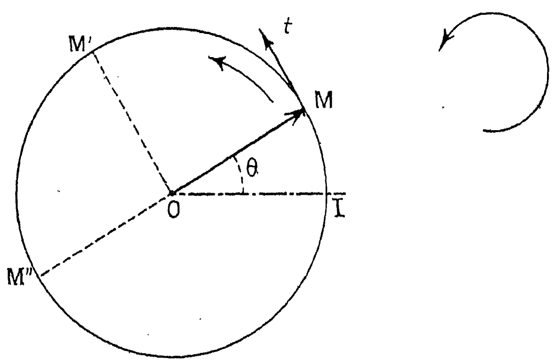
et ceci établit la propriété. Le calcul est le même pour une fonction scalaire.

(1) Dans cette dernière expression on peut remplacer les scalaires f, g, h partiellement ou totalement par des vecteurs, ainsi qu'on l'a déjà remarqué plus haut pour les différentielles secondes.

Comme toute courbe tracée sur une sphère de rayon R et de centre O peut être considérée comme l'hodographe d'un certain vecteur variable de module constant R, la démonstration précédente établit encore le fait géométrique bien connu : *en tout point d'une courbe tracée sur une sphère, la tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit à ce point.*

91. **Vecteur de module constant dans un plan.** — Le résultat précédent peut se préciser si le vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, fonction de t, de module constant R, reste constamment dans un plan fixe orienté. L'hodographe, lieu de M, est alors une circonférence de centre O, de rayon R; la dérivée de $\vec{a}$ est portée par la tangente (qui est bien

Fig. 41.



perpendiculaire au rayon) et sa mesure sur cette tangente, orientée dans le sens des arcs croissants est (n° 82) $\frac{ds}{dt}$. Mais l'arc s de la circonférence s'exprime en fonction de l'angle θ de la direction fixe OI, joignant le point O à l'origine des arcs, avec la direction du vecteur $\overrightarrow{OM}$. En prenant pour sens positif des arcs le sens d'orientation du plan on a

$$s = \widehat{IM} = R.\theta; \qquad \theta = (OI, OM);$$

d'où, en dérivant,

$$\frac{ds}{dt} = R.\frac{d\theta}{dt}.$$

connues sur les développements des fonctions scalaires (¹), et il semble inutile d'insister davantage ici.

95. Vecteur dérivé nul. — Une méthode analogue permet d'établir que : *si le vecteur dérivé d'une fonction vectorielle est constamment nul dans un intervalle, la fonction est constante*,

$$\text{si} \quad \overrightarrow{da} = 0, \quad \vec{a} \text{ est constant.}$$

En effet si la dérivée du vecteur est nulle, il en est de même de la dérivée de sa projection sur un axe quelconque (n° 92); donc cette projection, qui est une fonction scalaire, est constante et il en est de même de la fonction vectorielle.

Cette propriété permet d'établir la réciproque du n° 89 : *si un vecteur fonction d'une variable* $\vec{a}(t)$ *est constamment parallèle à son vecteur dérivé*

$$\vec{a}(t) \wedge \overrightarrow{a'}(t) = 0$$

il conserve une direction fixe.

Introduisons en effet le vecteur unitaire $\vec{u}(t)$ sur la direction de $\vec{a}(t)$, de sorte que $\vec{a}(t) = \lambda(t).\vec{u}(t)$. Dérivons et écrivons le parallélisme,

$$0 = \lambda.\vec{u} \wedge \left(\vec{u}.\lambda' + \overrightarrow{u'}.\lambda\right) = \lambda^2.\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right).$$

Comme $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont rectangulaires (n° 90) leur produit ne peut être nul que si $\overrightarrow{u'}$ est nul et par suite $\vec{u}$ constant.

96. Primitives. — On appelle « *primitive* » d'une fonction vectorielle $\vec{a}(t)$ toute fonction admettant $\vec{a}(t)$ comme dérivée, ou encore solution de « l'équation différentielle »

$$\overrightarrow{dy} = \vec{a}(t).dt$$

s'il en existe une, soit $\vec{A}(t)$, il y en aura une infinité, obtenues en

(¹) *Voir*, par exemple, *Cours de Mathématiques spéciales* de Haag, t. I, Chap. VIII, Développements limités, et le même Chapitre des Exercices (G.-V.).

ajoutant à celle-là un vecteur constant arbitraire

Effectivement, toute fonction ainsi obtenue est évidemment une solution; inversement, si $\vec{y}$ est une solution, $\vec{y} - \vec{A}$ est une fonction vectorielle dont la dérivée est nulle, c'est donc une constante.

Reste à montrer l'existence d'une primitive particulière; il suffit de chercher des primitives des projections qui sont des fonctions scalaires. En supposant par exemple la fonction vectorielle continue, il en est de même de ses projections, et l'on sait qu'elles ont alors des primitives.

Les règles de la somme et du changement de variable s'étendent aux fonctions vectorielles

$$t = \int \vec{a}(t).dt + \int \vec{b}(t).dt$$

$$\vec{a}(t).dt = \int \vec{a}.[f(u)].f'(u).du.$$

On emploie naturellement la même notation que pour les primitives ou intégrales indéfinies des fonctions scalaires.

Enfin la notion et la notation des intégrales définies s'étendent sans modifications : si $\vec{A}(t)$ est une primitive de $\vec{a}$

$$\int_{t'}^{t} \quad).dt = A(t'') - A(t').$$

Le théorème de la moyenne n'est plus exact.

II. — COURBES PLANES.

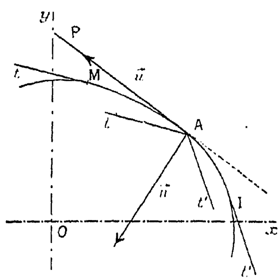
97. **Tangente à une courbe plane.** — Soit une courbe plane (C), tracée dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy. Supposons établie une correspondance entre un point M variable sur la courbe et un certain paramètre ou variable t. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est une fonction de t et il en est de même de ses projections (x, y) qui sont aussi les coordonnées de M. On dit alors que la

courbe (C) est « *définie paramétriquement* » ; c'est l'hodographe de $\overrightarrow{OM}$ fonction vectorielle de t. Nous ferons, en général, sur cet hodographe, les hypothèses du n° 82 : existence d'une tangente, possibilité de la définition de l'arc s en fonction de t, et existence de la dérivée $\frac{ds}{dt}$.

Ceci posé, la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

existe ; c'est un vecteur porté par la tangente à (C) en chaque point. Donc $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, ou, plus simplement, (dx, dy) sont les projections

Fig. 43.



d'un vecteur porté par la tangente à la courbe, c'est-à-dire encore sont des *paramètres directeurs* de cette *tangente* (n° 47).

Le quotient de ces paramètres directeurs $\frac{dy}{dx}$ est le *coefficient angulaire* ou *pente* de la tangente.

Nous avons également indiqué (n° 82) la mesure de la dérivée de $\overrightarrow{OM}$; en ne précisant pas la variable, ni le sens sur la tangente, on voit que le module de $d(\overrightarrow{OM})$ est égal à la valeur absolue de ds. D'où, en prenant les carrés,

$$ds^2 = \left[d(\overrightarrow{OM})\right]^2 = dx^2 + dy^2.$$

Si l'on prend l'arc pour variable $s = t$, la dérivée $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ est égale

au vecteur unitaire $\vec{u}$ sur la tangente. Ses projections $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sont donc les *cosinus directeurs* de cette tangente, orientée dans le sens des arcs croissants (n° 44).

En appliquant les méthodes du paragraphe VI du Chapitre II aux résultats précédents, on obtient *les équations vectorielles* de la *tangente* en A et de la *normale*, c'est-à-dire de la perpendiculaire à la tangente. Ce sont, en désignant par P un point « courant » pris sur l'une de ces droites :

$$\text{tangente :} \quad \overrightarrow{AP} \wedge d\left(\overrightarrow{OM}\right)_A = 0,$$

$$\text{normale :} \quad \overrightarrow{AP} . d\left(\overrightarrow{OM}\right)_A = 0.$$

L'indice A rappelle qu'il faut prendre la valeur des dérivées ou différentielles au point A. Il est à remarquer que la différentielle ne change pas si l'on remplace le point O par un autre point fixe I. Effectivement on a

puisque $\overline{IO}$ étant indépendant de la position de M sur la courbe, sa différentielle est nulle. Pour cette raison on écrit quelquefois dans les expressions $d\overrightarrow{M}$ au lieu de $d\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Ces équations vectorielles se traduisent immédiatement en équations cartésiennes (*voir* toujours Chap. II, § VI). Soient X, Y les coordonnées du point courant P; x, y celles de M sur la courbe; x_0, y_0 celles de A; $(dx)_0$, $(dy)_0$ les projections de $d\left(\text{OM}\right)_A$; les équations sont :

$$\text{tangente :} \quad (X - x_0)(dy)_0 - (Y - y_0)(dx)_0 = 0,$$

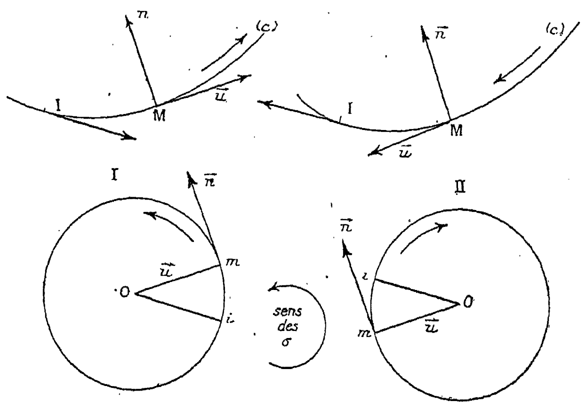
$$\text{normale :} \quad (X - x_0)(dx)_0 + (Y - y_0)(dy)$$

98. **Courbe en coordonnées polaires.** — Soit une courbe plane (C), rapportée à un système de coordonnées polaires, et soient ρ, θ les coordonnées polaires d'un de ses points M, supposées fonctions d'un même paramètre, par exemple θ.

D'après le n° 93 les composantes du vecteur $d\left(\overrightarrow{OM}\right)$ sur le rayon vecteur et la demi-droite directement rectangulaire sont respective-

de figure : on a représenté en I et II la même courbe (C) avec la même origine I des arcs et le même point M, mais on a adopté successivement les deux sens de parcours : sur la figure I, M est postérieur à l'origine, en II il est antérieur. Les indicatrices des vecteurs $\vec{u}$ sont des cercles de rayon 1 parcourus dans des sens opposés (indiqués par les flèches) ; mais les vecteurs $\vec{u}$ sont eux-mêmes opposés, il en résulte que leurs dérivées sont égales, parallèles et de même sens.

Fig. 44.



Le rayon de courbure a les dimensions d'une longueur ; en effet soit σ l'arc d'indicatrice de $\vec{u}$ compté dans le sens positif des angles à partir du point fixe i qui correspond à l'origine I de (C) ; σ est aussi l'angle $(\mathrm{O}i, \vec{u})$ dans le plan orienté. Le module de la dérivée de $\vec{u}$ est

$$\frac{d\sigma}{ds}$$

: demi-droite At reste dans une même région du plan par rapport à la tangente en A, on dit que cette région est celle de la concavité de la courbe.

On rattache aussi la notion de concavité à la position de la courbe : si au voisinage du point A la courbe est dans une même région par rapport à sa tangente, on dit que cette région est celle de la concavité de la courbe.

Le sentiment de la continuité graphique inspiré par le cas du cercle montre que ces deux définitions sont ordinairement équivalentes. Nous le démontrerons par le calcul au n° 104 dans le cas d'un point simple à courbure non nulle.

même signe que $\frac{d\sigma}{ds}$, de sorte que

$$\varepsilon = \mathrm{R}.\frac{d\sigma}{ds}.$$

Ceci posé, considérons le trièdre trirectangle direct constitué par les vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{n}$, et le vecteur unitaire directement perpendiculaire $\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{n}$. Ce trièdre est appelé le *trièdre de Frenet* attaché au point M de la courbe (C). La troisième arête du trièdre est parallèle à $\vec{k}$ et, d'une façon plus précise, on a

$$\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{n} = \varepsilon.\vec{k}.$$

Étudions la variation des vecteurs unitaires des arêtes de ce trièdre. On a indiqué au numéro précédent une valeur de la différentielle de $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{b}$ reste équipollent à lui-même sur tout arc de (C) où ε garde un signe constant, c'est-à-dire encore tant que la courbure (ou la concavité) ne change pas de sens. Pour obtenir la variation de $\vec{n}$, il suffit de remarquer que

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{u} = \varepsilon.\vec{k} \wedge \vec{u};$$

d'où, en différentiant, et tenant compte de ce que $\vec{b}$ est constant :

$$\overrightarrow{dn} = \vec{b} \wedge \overrightarrow{du} = \vec{b} \wedge \vec{n}.\left(\frac{1}{\mathrm{R}}. \qquad \frac{1}{\mathrm{R}}\, ds\right).$$

En rassemblant ces divers résultats, *on obtient un groupe de formules*, que nous retrouverons, généralisées, dans l'étude des courbes gauches et *qui est connu sous le nom de formules de Frenet :*

$$\left(\overrightarrow{dM}\right) = \vec{u}.ds \qquad \begin{cases} \overrightarrow{du} = \vec{n}.\frac{1}{\mathrm{R}}\, ds, \\ \overrightarrow{dn} = -\vec{u}.\frac{1}{\mathrm{R}}\, ds, \\ \overrightarrow{db} = 0. \end{cases}$$

101. Expression vectorielle de la courbure. — Considérons une

102. Expression cartésienne de la courbure. — En désignant par x, y les coordonnées d'un point M de la courbe et par x', y'; x'', y'' leurs dérivées premières et secondes par rapport à un paramètre t, d'ailleurs quelconque, l'expression précédente s'écrit en remplaçant le produit extérieur du dénominateur par sa mesure (n° 28)

$$R = \frac{\quad}{|x'y''-y'x''|}.$$

La puissance $\frac{3}{2}$ indique, bien entendu, le cube de la racine carrée, prise en valeur absolue.

Cas particuliers. — Si l'on prend comme *variable* x, la courbe représente alors la variation d'une certaine fonction $y=f(x)$, l'expression se simplifie, on a $x'=1$, $x''=0$, d'où

$$R = \frac{\quad}{|y''|}.$$

Si l'on prend comme *variable l'arc de courbe* s, nous avons vu (n° 99) que la courbure est le module de $\frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{ds^2}$; en traduisant en langage cartésien,

Signe de $(x'y''-y'x'')$. — Cette expression n'est autre que la mesure du produit extérieur des différentielles, divisé par $(dt)^3$, elle est donc égale à

Le sens des s étant arbitraire, prenons-le identique au sens des t, de façon que $\frac{ds}{dt}$ soit positif; alors $\vec{u}$ est le vecteur unitaire, prolon-

par $\overrightarrow{dM}$, sans ambiguïté, d'où l'expression du rayon de courbure :

$$R = \frac{\quad}{|\overrightarrow{dM} \wedge d^2\vec{M}|}$$

geant le sens des t croissants. Mais le signe de l'expression est celui de ε ; donc :

$(x'y'' - y'x'')$ est positif ou négatif, suivant que la tangente à la courbe dans le sens des t croissants et la normale, dirigée dans le sens de la courbure, forment un angle droit positif ou négatif (par rapport à l'angle des axes). Ce signe caractérise le sens de la concavité de la courbe.

103. Expression de la courbure en coordonnées polaires. — On obtient l'expression de la courbure en coordonnées polaires, en explicitant le numérateur et le dénominateur de l'expression vectorielle donnée n° 93. En appelant ρ et θ les coordonnées de M, on a

$$d^2(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \vec{r}.[d^2\rho - \rho.(d\theta)^2] + \vec{p}.[\rho.\iota \quad \cdot 2.d\rho.\iota$$

d'où l'expression du produit extérieur

$$(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = (\vec{\ } \quad (\rho.d\rho.d^2\theta + 2.d\rho^2.d\theta - \rho.d^2\rho.$$

$\vec{r}$ et $\vec{p}$ sont des vecteurs unitaires directement perpendiculaires, leur produit est le vecteur unitaire $\vec{k}$, de sorte que le dénominateur de R est la valeur absolue de la seconde parenthèse; nous avons déjà calculé le numérateur (expression de l'arc en coordonnées polaires, n° 98). L'expression de R est donc, en remplaçant les différentielles par des dérivées :

$$\mathrm{R} = \frac{(\rho'^2 + \rho^2.\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho.\rho'.\theta'' + 2\rho'^2\theta' - \rho.\rho''.\theta' + \rho^2.\theta'^3|}$$

Cas particulier. — Si l'on prend comme *variable l'angle polaire* θ, l'expression se simplifie, on a $\theta' = 1$, $\theta'' = 0$, d'où

$$\mathrm{R} = \frac{\quad}{|\rho^2 + 2.\rho'^2 - \rho.\rho''|}$$

On donne à cette expression une forme plus élégante en intro-

En élevant au carré la deuxième égalité, on obtient

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left[\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right]^2 = (\overrightarrow{a'_0}$$

$\vec{\varepsilon}_1(t)$ et $\eta_1(t)$ sont des fonctions, l'une vectorielle, l'autre scalaire, mais qui sont, comme $\vec{\varepsilon}(t)$, infiniment petites avec t et indéfiniment dérivables. En convenant de choisir A comme origine des arcs et de prendre au voisinage de A, comme sens des arcs celui des t croissants, on déduit de là une expression de l'arc :

$$s = \widehat{AM} = \int^t \qquad \eta_1(t).dt.$$

Cette intégrale est bien déterminée et les arcs ainsi définis vérifient le théorème d'addition des chemins

à condition toutefois de rester dans un intervalle assez voisin de A pour que la quantité sous le radical ne s'annule pas.

En outre, s et t sont des infiniment petits du même ordre et l'on peut développer l'un en fonction des puissances croissantes de l'autre ; pour avoir s en fonction de t, il suffit de recommencer les opérations précédentes en prenant un plus grand nombre de termes dans le développement de $\overrightarrow{OM}$: le développement commence par $|\overrightarrow{a'_0}|.t$. En cherchant le développement de la fonction inverse (¹) (ce qui est possible à cause de l'existence du premier terme), on trouve t en fonction de s.

On obtient immédiatement la courbure en un point simple A, en fonction des coefficients du développement. Le vecteur $\vec{u}_0$ (nos 97 et 100) est, avec le sens des arcs précédemment défini,

$$u_0 = \qquad ds \qquad dt$$

(¹) Il suffit, par exemple, de se donner le développement de t avec des coefficients indéterminés, de substituer dans celui de s et d'exprimer que ce nouveau développement se réduit à son premier terme s, ce qui détermine de proche en proche les coefficients laissés d'abord indéterminés (*voir* par exemple HAAG, *Cours de Math. spéc.*, t. I, Exercices, Ex. 7 du Chap. VIII).

l'on considère le vecteur

$$d(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) \qquad \overrightarrow{(t)}.t,$$

il a deux limites opposées suivant que M se rapproche de A sur la branche IA$\left(-\frac{\overrightarrow{a''_0}}{|\overrightarrow{a''_0}|}\right)$ ou sur la branche JA$\left(+\frac{\overrightarrow{a''_0}}{|\overrightarrow{a''_0}|}\right)$. Pour la seconde détermination, au contraire, il y a continuité de ce vecteur $\vec{u}$ en A, mais il y a changement du sens des arcs au point A : ce sens est respectivement AI et AJ sur chacune des branches. Il est à remarquer que c'est à cette seconde détermination qu'on est conduit si l'on prend pour $\frac{ds}{dt}$ ainsi que pour sa dérivée une fonction continue. C'est pourquoi on dit couramment que « *le sens des arcs change en un point de rebroussement ordinaire* ».

Considérons maintenant le cas où, $\overrightarrow{a''_0}$ n'étant pas nul, un certain nombre des dérivées suivantes, jusqu'à l'ordre $p-1$ inclus, sont parallèles à ce vecteur ou nulles. En raisonnant comme pour le point d'inflexion on peut toujours décomposer $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ en deux vecteurs :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}} \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{a''_0}.\left[\frac{t^2}{2} + \alpha.\frac{t^3}{6} + \ldots + \lambda.\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\right], \\ \overrightarrow{\mathrm{PM}} &= \overrightarrow{a_0^{(p)}}.\frac{t^p}{p!} + t^p.\overrightarrow{\varepsilon(t)}. \end{aligned}$$

La tangente est toujours parallèle à $\overrightarrow{a''_0}$ et le point P est au delà de A dans le sens de ce vecteur pour t suffisamment petit.

Si p est impair, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ change de sens avec le signe de t, et la disposition de la courbe est celle de la figure 47 ; on dit encore *que la forme du rebroussement est de première espèce*.

Si p est pair, le sens de $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ reste le même pour t suffisamment petit, quel que soit son signe ; les deux branches de courbe sont d'un même côté de la tangente, on dit *que la forme du rebroussement est de seconde espèce* (*fig.* 48). Les considérations sur l'arc ne dif-

la définition de l'arc : dans l'expression de ds c'est une puissance paire de t qui se met en facteur, elle est par suite égale à sa valeur absolue qui, ainsi que sa dérivée, est une fonction continue de t.

D'après Halphen (*loc. cit.*) h est l'*ordre* et k-h la *classe* du point considéré. En ce sens : un *point ordinaire est un point d'ordre et de classe* 1; *un point d'inflexion ordinaire est un point d'ordre* 1 *et de classe* 2; *un point de rebroussement ordinaire est un point d'ordre* 2 *et de classe* 1.

Les points de rebroussement comme les points d'inflexion se rencontrent sur des courbes usuelles, définies de façon simple, ainsi qu'on le verra dans les exemples cités au paragraphe III. On les trouve notamment sur les développées de courbes dont nous allons nous occuper aux numéros suivants ([1]).

107. Centre de courbure et développée. — Soit (C) une courbe plane, M un de ses points; portons sur la normale en M, dans le sens de la courbure, une longueur MI égale au rayon de courbure R en M : le point I est appelé *le centre de courbure* de la courbe en M.

Le lieu de I, lorsque M varie, est une courbe (E) qu'on appelle *développée* de la courbe (C).

La normale à la courbe (C) *est constamment tangente au point* I *à la développée* (E).

Nous allons établir cette propriété pour un arc continu de (C) où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$, ainsi que le rayon de courbure R, sont des fonc-

([1]) La même méthode de développement peut s'appliquer à l'étude d'une branche infinie d'une courbe. Cette branche étant obtenue par exemple pour la valeur $t = 0$ on peut chercher à retrancher de $\overrightarrow{OM}$ un polynome en $\frac{1}{t}$ à coefficients vectoriels, tel que la différence

$$\overrightarrow{OM} - \left[\vec{c}_k \cdot \frac{1}{t^k} + \ldots + \vec{c}_1 \cdot \frac{1}{t} + \right.$$

devienne infiniment petite avec t.

Le lieu de P est une « *courbe asymptote* » à la courbe étudiée.

Si tous les $\vec{c}$, à l'exception de $\vec{c}_0$, sont parallèles entre eux ou nuls, cette courbe est une « droite asymptote » ou plus simplement une « *asymptote* ».

L'étude des premiers termes de la différence donne la position de la courbe par rapport à la courbe asymptote.

Ceci montre que la tangente au lieu de I est parallèle au vecteur $\vec{n}$ et par suite est confondue avec la normale IM.

De la propriété précédente il résulte que les « normales à la courbe (C) enveloppent (¹) la développée (E) ».

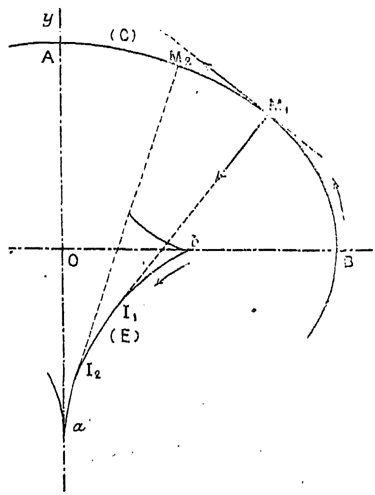
108. **Arc de développée.** — La dernière formule entraîne d'autres conséquences ; si l'on prend sur (E) comme sens positif des arcs, celui qui est prolongé par le vecteur $\vec{n}$, et si l'on appelle s_1 l'arc ainsi défini, on a

$$\vec{n}.ds_1 = d(\overrightarrow{OI}) = \vec{n}.dR, \qquad \text{d'où} \qquad ds_1 = dR.$$

La différentielle de l'arc de développée est égale à la différentielle du rayon de courbure de la courbe primitive.

On peut intégrer cette relation entre deux points I_1, I_2 de la

Fig. 50.



courbe (E) correspondant aux points M_1, M_2 de (C). Si entre ces

(¹) Pour pouvoir dire que (E) est « l'enveloppe des normales », il faudrait en toute rigueur établir que ces normales ne sont pas tangentes à une autre courbe. Cela résulte du fait assez évident que, dans une famille de droites, chaque droite n'a en général qu'un seul point de contact avec son enveloppe (*voir* n° 106).

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ non parallèles. Si, pour t voisin de o, on forme les dérivées première et seconde de $\overrightarrow{OM}$ et leur produit extérieur, la mesure de ce produit est un infiniment petit du second ordre par rapport à t, le cube de la valeur absolue de la dérivée première est du troisième ordre et le rayon de courbure donné par la formule du n° 101 est infiniment petit du premier ordre. C'est dire que le point I tend vers O : *en un point de rebroussement ordinaire, la développée rencontre la courbe.* On en trouvera un exemple sur les figures 49 et 54. Nous verrons au numéro suivant que ce point peut être ordinaire sur la développée.

Pour les autres points singuliers les résultats sont plus compliqués, par exemple pour un rebroussement d'ordre 2 et de classe 2, le rayon de courbure tend vers une limite finie lorsque M se rapproche de O; la développée ne rencontre plus la courbe.

110. **Développante.** — *On appelle « développante » d'une courbe* (E) *toute courbe* (C) *qui admet* (E) *pour développée.*

Soit une courbe (E) et supposons qu'il en existe une développante (C). D'après ce qui précède, sur les relations entre (C) et sa développée (E), en choisissant sur (E) un certain sens et un point origine I_0, la courbe (C) doit être le lieu du point M obtenu en portant sur la tangente en un point I de (E), dans le sens opposé à celui des arcs, une longueur $\overline{IM} = \overset{\frown}{I_0 I}$ (*fig.* 49). Reste à voir si cette construction donne toujours une développante, quel que soit le sens choisi sur (E) et le point de départ I_0.

Appelons s_1 l'arc de courbe $\overset{\frown}{I_0 I}$, $\vec{u}_1$ le vecteur unitaire sur la tangente à (E) prolongeant le sens des arcs. La construction de M se traduit par l'égalité

en différentiant on obtient

$$_1 . du_1 = -$$

en se rappelant que $d(\overrightarrow{OI}) = \vec{u}_1 . ds_1$. Mais $d\vec{u}_1$, différentielle du vec

$_1$ de module constant, lui est perpendiculaire. Donc $d(\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont les vecteurs déduits de $\overrightarrow{OM}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ et de $+\pi$. Le sens de la courbure, qui est celui de $\overrightarrow{OM''}$, est donc dirigé de M vers O. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont respectivement $\frac{\overrightarrow{OM'}}{R}$, $\frac{\overrightarrow{OM''}}{R}$ et le rayon de courbure est R; enfin *le centre de courbure est constamment* O et la développée se réduit à ce seul point.

Il en résulte qu'en tout point A d'une courbe (à courbure non nulle) il y a une et une seule circonférence qui a un contact du second ordre avec la courbe : c'est la circonférence ayant pour centre le centre de courbure I, et pour rayon le rayon de courbure $R = IA$; on l'appelle le *cercle de courbure* ou le *cercle osculateur en* A. Si le contact est d'ordre 2 seulement, la circonférence traverse la courbe.

116. Ellipse. — Soit une ellipse de longueurs d'axes $2a$, $2b$; désignons par $\vec{i}$, $\vec{j}$ des vecteurs unitaires sur les axes de symétrie (*fig.* 50). On peut définir l'ellipse comme étant le lieu de M, donné en fonction du paramètre φ par

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.a.\cos\varphi + \vec{j}.b.\sin\varphi.$$

Dérivons par rapport à φ,

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{d\varphi} = -\vec{i}.a.\sin\varphi + \vec{j}.b.\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{d\varphi^2} = -\vec{i}.a.\cos\varphi - \vec{j}.b.\sin\varphi.$$

En formant le produit extérieur de ces deux vecteurs et le carré du premier, on obtient :

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{d\varphi} \wedge \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{d\varphi^2} = \vec{i} \wedge \vec{j}.ab.\sin^2\varphi - \vec{j} \wedge \vec{i}.ab.\cos^2\varphi = \vec{i} \wedge \vec{j}.ab,$$

La mesure du produit extérieur étant positive ($\varepsilon = +1$, n° 101),

M_0 désigne le point qui correspond à la valeur $t = 0$. A deux valeurs *opposées* de t correspondent un seul point P et deux points M', M'' tels que

$$\overrightarrow{PM'} = -\overrightarrow{PM''} = \pm 2\vec{b}.|t|.$$

Le lieu de P est la demi-droite $M_0 z$ d'origine M_0 parallèle au vecteur $\vec{a}$ et de même sens (n^{os} 77 et 81). Lorsque P se déplace de M_0 vers l'infini sur cette demi-droite, les longueurs PM' = PM'' augmentent indéfiniment ; mais, puisque

$$\overrightarrow{M'} = 2\vec{b}.t \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M_0 P} = \vec{a}.t^2,$$

le rapport

$$\frac{\overline{PM}'^2}{\overline{M_0 P}}$$

reste constant ; on le désigne habituellement par $2p'$. La correspondance entre les points M', M'' se traduit en disant que la courbe admet $M_0 z$ comme *axe de symétrie oblique*, ou encore comme *diamètre des cordes parallèles à* $\vec{b}$.

Cette construction tombe en défaut si $\vec{b}$ et $\vec{a}$ sont parallèles, on a alors, en posant $\vec{b} = \beta\vec{a}$:

le lieu de M est (n^{os} 77 et 81) une demi-droite parallèle à $\vec{a}$.

En revenant au cas général, faisons un changement de paramètre en posant $t = \theta + t_0$; l'expression de $\overrightarrow{OM}$ est encore un trinome en θ :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}.\theta^2 + 2.\left(\vec{a}t_0 + \vec{b}\right)\theta + \left(\vec{\ } \quad \vec{\ } \quad \vec{\ }\right)$$

A la valeur 0 du nouveau paramètre correspond le point M_1 de la courbe tel que

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{a}.t_0^2 + 2\vec{b}.t \qquad \vec{\ }$$

La demi-droite $M_1 z$, parallèle à $\vec{a}$, est encore un diamètre pour les

circonférence précédente de rayon 2 roulant sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de centre O et de rayon 8.

Comme pour la cycloïde on peut encore développer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de t en un point quelconque et montrer que tous les points sont simples, sauf ceux qui se trouvent sur le cercle fixe, qui sont des points de rebroussement ordinaires; comme le point I ne va jamais à l'infini, il n'y a pas de points d'inflexion.

Les calculs et les résultats relatifs à la cycloïde et à l'hypocycloïde à quatre rebroussements ont évidemment une allure générale et peuvent s'étendre aux diverses hypo- ou épicycloïdes, c'est-à-dire aux courbes engendrées par un point d'une circonférence roulant sans glisser à l'intérieur ou à l'extérieur d'une circonférence fixe ([1]).

IV. — COURBES GAUCHES.

121. Tangente et plan normal. — Soit une courbe (C) plane ou gauche, définie paramétriquement dans l'espace : $\overrightarrow{OM}$, et par suite ses composantes x, y, z, sont fonctions d'un paramètre t. Nous ferons encore, en général, les hypothèses du n° 82 : la courbe a une tangente, on peut définir l'arc s et la dérivée $\frac{ds}{dt}$ existe.

Ceci posé, on peut dériver ou différentier le vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{i}.dx + \vec{j}.dy + \vec{k}.dz;$$

$d(\overrightarrow{OM})$ est un vecteur porté par la tangente, ses composantes dx, dy, dz sont des *paramètres directeurs* de cette tangente.

Le module de $d(\overrightarrow{OM})$ étant $|ds|$, on a

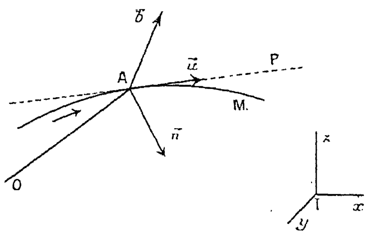
Si l'on prend l'arc pour variable, $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ est le vecteur unitaire $\vec{u}$

([1]) Pour ces résultats généraux et quelques autres que l'on établit aussi aisément par le calcul vectoriel, on pourra par exemple se reporter au *Traité de Mathématiques spéciales* de M. Haag, Tome II, Chapitre XXXIX, soit encore au *Cours de Géométrie infinitésimale* de M. G. Demartres, Chapitre III et Chapitre IX (Gauthier-Villars).

sur la tangente, orientée dans le sens des arcs croissants, les dérivées $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont les *cosinus directeurs* de la tangente ainsi orientée.

Le plan passant par un point A *de la courbe* (C) *et normal à la tangente en* A *s'appelle le « plan normal » à la courbe en* A. Toute droite passant par A et contenue dans le plan normal est *une normale à la courbe* et réciproquement.

Fig. 56.



On obtient immédiatement les équations de la tangente et l'équation du plan normal, en appliquant les méthodes du Chapitre II, § VII, aux résultats précédents. Ce sont, en désignant par P un point courant sur cette droite ou dans ce plan :

Tangente.................. $\overrightarrow{AP} \wedge \left[d(\overrightarrow{OM})\right]_A = 0$

Plan normal............... $\overrightarrow{AP} \cdot \left[d(\overrightarrow{OM})\right]_A = 0$

On comparera avec les équations de la tangente et de la normale à une courbe plane (n° 97); les notations sont les mêmes et il y a lieu de faire les mêmes remarques. Ces équations se traduisent immédiatement en équations cartésiennes; ce sont :

Tangente. $X -$

Plan normal....... $(X - x_0).(dx)_0 + (Y - y_0).(dy)_0 + (Z - z_0)(dz)_0 = 0$

122. Plan osculateur. — *Considérons le plan passant par la tangente au point* A *de la courbe* (C) *et parallèle à la tangente en un point voisin* M; *la limite de ce plan (si elle existe), lorsque* M *tend vers* A, *est le plan osculateur en* A *à la courbe.*

On dit quelquefois, d'une façon abrégée, que le plan osculateur contient la tangente en A et est parallèle à la tangente en un point infiniment voisin de A.

On appelle *binormale* la perpendiculaire au plan osculateur. C'est donc la limite d'une perpendiculaire commune à deux tangentes infiniment voisines.

On appelle *normale principale* la normale à la courbe qui est située dans le plan osculateur. C'est l'intersection du plan normal et du plan osculateur.

D'après ces diverses définitions, la tangente, la normale principale et la binormale sont trois droites perpendiculaires deux à deux. La tangente et la normale principale déterminent le plan osculateur; la normale principale et la binormale déterminent le plan normal; enfin la binormale et la tangente déterminent un troisième plan perpendiculaire aux deux précédents que l'on appelle le *plan rectifiant*.

D'après sa définition, le plan osculateur est parallèle aux vecteurs $d(\overrightarrow{OM})$, $d^2(\overrightarrow{OM})$. Si ces vecteurs ne sont pas parallèles, ils déterminent effectivement ce plan, et le produit extérieur

est un vecteur normal à ce plan, donc parallèle à la binormale (1).

On obtient un vecteur porté par la normale principale en formant le produit extérieur du vecteur $d(\overrightarrow{OM})$ par le précédent; c'est donc un double produit extérieur que l'on peut transformer par la formule du n° 35. En rapprochant ces divers résultats, on obtient, pour caractériser les trois droites : tangente, normale principale, binormale, les vecteurs parallèles à ces droites :

Tangente......... $d(\overrightarrow{OM})$

Normale principale. $d(\overrightarrow{OM}) \wedge \left[d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})\right]$

$$= d(\overrightarrow{OM}).\left[d(\overrightarrow{OM}).d^2(\overrightarrow{OM})\right] - d^2(\overrightarrow{OM}).\left[d(\overrightarrow{OM})\right]^2$$

Binormale......... $d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})$

(1) Remarquons que, d'après le n° 88, un changement de paramètre multiplie seulement ce produit extérieur par un scalaire, et par suite ne change pas sa direction (*voir* au numéro suivant et au n° 131 les cas d'exception).

Les trois plans : normal, osculateur, rectifiant, sont de même caractérisés par leurs équations (P désignant toujours un point courant d'un de ces plans) :

Plan normal............... $\overrightarrow{AP}.\left[d(\overrightarrow{OM})\right]_A = 0$

Plan osculateur............ $\overrightarrow{AP}.\left[d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})\right]_A = 0$

Plan rectifiant............. $\overrightarrow{AP}.\left\{d(\overrightarrow{OM}) \wedge \left[d(\overrightarrow{OM}) \wedge d^2(\overrightarrow{OM})\right]\right\}_A = 0$

La traduction en équations cartésiennes est immédiate.

Si la courbe est plane, $d(\overrightarrow{OM})$ *et* $d^2(\overrightarrow{OM})$ *sont dans son plan qui est, par suite, le plan osculateur. La binormale est la perpendiculaire au plan de la courbe, la normale principale est la normale à la courbe dans son plan.*

123. Courbure d'une courbe dans l'espace. — Étant donnée une courbe (C) dans l'espace (plane ou gauche), prenons comme paramètre l'arc de courbe $\widehat{IM} = s$. La dérivée $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ est le vecteur $\vec{u}$ de mesure $+1$ sur la tangente orientée dans le sens des arcs croissants (n° 82). La dérivée $\frac{d\vec{u}}{ds}$ du vecteur de module constant $\vec{u}$ lui est normale (n° 90), donc est normale à la courbe; comme par ailleurs c'est la dérivée seconde de $\overrightarrow{OM}$, elle est dans le plan osculateur. Par conséquent, cette dérivée

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{ds^2}$$

est un *vecteur* porté par la *normale principale* [1]. Par définition :

---

[1] On a indiqué (n° 122) l'expression d'un vecteur porté par la normale principale. En remplaçant dans cette expression les différentielles par les dérivées par rapport à s, on obtient

$$\vec{u}.\left(\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{ds}\right) - \frac{d\vec{u}}{ds}.(\vec{u}.\vec{u}) = -\frac{d\vec{u}}{ds};$$

on retrouve la propriété indiquée de la dérivée de $\vec{u}$ par rapport à s.

128. Point simple à courbure et torsion non nulles. — Considérons, comme au n° 104, une branche de courbe gauche (C), définie paramétriquement en fonction de t, au voisinage d'un point A correspondant à $t = 0$, par une fonction indéfiniment dérivable; en prenant par exemple A pour origine du vecteur, écrivons son développement jusqu'à l'ordre 3 :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{a'_0}\, t + \overrightarrow{a''_0} \frac{t^2}{2} + \overrightarrow{a'''_0} \frac{t^3}{6} + t^3.\overrightarrow{\varepsilon}(t).$$

On dit encore que *le point* A *est « simple » sur la branche de courbe, si la première dérivée* $\overrightarrow{a'_0}$ *est un vecteur non nul.* Le raisonnement du n° 104 s'étend sans modification : au voisinage d'un point simple A d'une courbe gauche, on peut définir un arc de courbe $s = \widehat{\mathrm{AM}}$; s et t sont des infiniment petits simultanés, développables l'un par rapport à l'autre.

Les définitions du plan osculateur, de la courbure et de la torsion s'appliquent donc en un point simple d'une courbe gauche et l'on obtient le résultat suivant : *si les trois premières dérivées* $\overrightarrow{a'_0}$, $\overrightarrow{a''_0}$, $\overrightarrow{a'''_0}$ *sont des vecteurs non nuls et non dans un même plan* (c'est-à-dire encore formant un « véritable » trièdre), *il existe au point* A *un plan osculateur, qui est le plan des vecteurs* $\overrightarrow{a'_0}$ *et* $\overrightarrow{a''_0}$; *en outre la courbure et la torsion ne sont pas nulles.* Ceci résulte en effet de ce que le produit mixte (n° 33) $\overrightarrow{a'_0}.\left(\overrightarrow{a''_0} \wedge \overrightarrow{a'''_0}\right)$, et par suite le produit extérieur $\overrightarrow{a'_0} \wedge \overrightarrow{a''_0}$ ne sont pas nuls. On dit que le point est *ordinaire.*

Prenons, comme sens des arc, le sens des t croissants, $\overrightarrow{a_0}$ et $\overrightarrow{u_0}$ sont parallèles et de même sens; il en est de même des produits

$$\overrightarrow{a'_0} \wedge \overrightarrow{a''_0} \qquad \text{et} \qquad {}_0 \wedge \overrightarrow{n_0}$$

qui (n° 126) ne diffèrent que par le facteur scalaire positif $\frac{1}{\mathrm{R}} \cdot \Big(\overline{dt}$

par conséquent dans le plan osculateur $\overrightarrow{a''_0}$ et $\overrightarrow{n_0}$ se dirigent vers la même région du plan, par rapport à la tangente prolongée. On obtient encore la forme de la courbe, au voisinage de A, en écrivant

CHAPITRE IV.

FONCTIONS VECTORIELLES DE DEUX VARIABLES.

I. — DÉRIVÉES PARTIELLES D'UN VECTEUR.

132. **Définition d'une fonction vectorielle de deux variables.** — *On dit qu'une fonction vectorielle* $\vec{a}$ *de deux variables scalaires* u, v *est « définie » pour les valeurs de* u, v *comprises dans certaines limites, s'il existe une règle faisant correspondre à tout système de telles valeurs une « détermination du vecteur* $\vec{a}$ *», définie par sa direction, son sens et son module, c'est-à-dire encore à une équipollence près.*

Pour représenter une fonction vectorielle de deux variables, et ses déterminations pour certaines valeurs des variables, nous emploierons, comme pour le cas d'une variable (n° 79), un symbole analogue à celui des fonctions scalaires

$$\vec{a}(u_0, v_0); \quad \vec{a}(u, v).$$

Les projections de $\vec{a}$ sur un système de trois axes de repère sont des fonctions simultanées de u, v : $x(u, v)$; $y(u, v)$; $z(u, v)$.

Il peut être commode de représenter un système de valeurs des variables u, v par le point m d'un plan ayant pour coordonnées u, v par rapport à deux axes donnés. On dit alors que le vecteur $\vec{a}$ est une fonction de la position du point m, ou plus brièvement une fonction de m; on emploie la locution abrégée : « *valeur de* $\vec{a}$ *au point* m_0 » à la place de « valeur de la fonction $\vec{a}$ pour le système de valeurs des

variables u_0, v_0 » (coordonnées du point m_0). Au lieu de dire que u, v sont compris entre certaines limites, on dit que m est compris dans un « domaine du plan des u, v ». Pour éviter des difficultés de définition et de continuité, on peut, dans la plupart des énoncés, choisir pour ce domaine un rectangle à côtés parallèles aux axes, ce qui revient à supposer u et v contenus respectivement dans des intervalles : $(u_0 - h,\ u_0 + h)$, $(v_0 - k,$

133. Chemin. — Une fonction vectorielle de deux variables, u, v, étant définie, imaginons que l'on se donne une « suite continue » de systèmes de valeurs des variables, en prenant pour u et v des fonctions simultanées d'une même variable t (on suppose naturellement les valeurs de ces fonctions comprises dans les limites de définition de la fonction vectorielle). Le point représentatif m (de coordonnées u, v) décrit alors une courbe, à l'intérieur du domaine de définition. Pour cette raison, on dit que l'on s'est donné un « *chemin* » (¹).

Le vecteur $\vec{a}$, fonction des deux variables, devient, sur le chemin, fonction du seul paramètre t. On dit qu'il est « *fonction composée* » de t par l'intermédiaire des fonctions u et v de t.

Parmi les divers chemins, il est naturel de considérer particulièrement les chemins parallèles aux axes du plan des u, v; c'est-à-dire le chemin $v = v_0$ constant : $\vec{a}$ reste fonction de la seule variable u; et le chemin $u = u_0$ constant : $\vec{a}$ reste fonction de la seule variable v.

134. Limites et continuité. — La notion de chemin permet de généraliser, de façon presque immédiate, les notions de limite et de continuité définies pour les fonctions d'une variable (nº 80).

On dit que *la fonction vectorielle* $\vec{a}\,(u, v)$ *a une limite* $\vec{a}_0$ *lorsque* u, v *tendent vers* u_0, v_0, *si, étant donné un chemin passant par le point* m_0 (de coordonnées u_0, v_0), *le vecteur* $\vec{a}(u, v)$ *a pour*

(¹) Cette définition est, bien entendu, la même que pour une fonction scalaire de deux variables. L'existence *graphique* du chemin suppose naturellement certaines conditions de continuité pour les fonctions u et v de t.

limite le vecteur $\vec{a}_0$ *lorsque le point* m *tend vers* m_0 *en se déplaçant sur le chemin, — ceci ayant lieu quel que soit le chemin envisagé passant par* m_0.

La fonction $\vec{a}(u, v)$ *est « continue au point* m_0 *» si sa valeur en* m_0 *est précisément équipollente à sa limite lorsque* m *tend vers* m_0.

Les notions de limite et de continuité se ramènent ainsi aux notions analogues pour le cas d'une variable. Par suite les propriétés des limites et de la continuité des opérations s'étendent immédiatement (n° 80).

En particulier si $\vec{a}(u, v)$ est une fonction continue pour toutes les valeurs de u, v comprises dans certaines limites, les projections de $\vec{a}$ sur les axes sont des fonctions continues des deux variables dans les mêmes limites et *réciproquement* (*voir* la fin du n° 80).

135. **Hodographe.** — Comme dans le cas d'une seule variable (n° 81) on peut choisir arbitrairement le point d'application O du vecteur $\vec{a}(u, v)$. A chaque système de valeurs u, v ou à chaque point représentatif m, correspond ainsi un point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u, v).$$

A un chemin correspond en général une courbe, lieu de M lorsque m décrit le chemin. Les diverses courbes, obtenues en variant le chemin, sont en général tracées sur une même *surface*, lieu de M, lorsque u, v varient arbitrairement. On appelle encore cette surface « l'*hodographe* » ou « l'*indicatrice* » de la fonction vectorielle.

En particulier on peut considérer la surface comme engendrée par les hodographes correspondant à l'ensemble des chemins $u = u_0$ lorsqu'on fait varier u_0, ou encore par les hodographes correspondant à l'ensemble des chemins $v = v_0$ lorsqu'on fait varier v_0. A ce point de vue la surface hodographe est engendrée par un double réseau ou une double famille de courbes hodographes.

L'existence graphique de la surface hodographe suppose naturellement certaines propriétés de la fonction vectorielle, en particulier la continuité.

Comme on l'a signalé pour une courbe (n° 81), à un point de la surface peuvent correspondre plusieurs systèmes de valeurs des paramètres u, v : en ce point il passe alors plusieurs courbes correspondant à des chemins $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$; nous reviendrons sur cette circonstance dans l'étude des familles de courbes (n^{os} 161 et suivants).

136. Étude d'une surface; coordonnées curvilignes. — Considérons inversement une surface (S) et supposons qu'on ait établi une correspondance entre chacun des points M de la surface et un système de variables u, v, ou encore entre M et un point m d'un plan. Les variables u, v s'appellent les « *coordonnées curvilignes* » de M sur la surface; m est « l'image » de M dans le plan.

La surface peut être considérée comme définissant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des variables u, v. Elle est l'hodographe de la fonction ainsi définie.

On retrouve le double point de vue déjà signalé pour les fonctions d'une variable (n° 81) : la surface hodographe peut servir à « illustrer » l'étude d'une fonction vectorielle de deux variables; inversement l'étude d'une surface peut être remplacée par celle d'une fonction vectorielle de deux variables.

137. Dérivées partielles. — On appelle *vecteur dérivé partiel*, ou simplement *dérivée partielle*, de la fonction vectorielle $\vec{a}(u, v)$, par rapport à u, pour les valeurs u_0, v_0, la dérivée de $\vec{a}(u, v_0)$, considérée comme fonction de u seul, cette dérivée étant prise pour la valeur u_0 de la variable.

En se reportant à la définition du n° 82, et l'incorporant à la nouvelle définition, on voit que cette dérivée partielle est la limite du vecteur

$$u - u_0$$

lorsque u tend vers u_0.

De même la dérivée partielle par rapport à v est la limite du vecteur

$$\frac{\vec{a}(u_0, v) - \vec{a}(u_0, v_0)}{v - v_0}$$

lorsque v tend vers v_0.

domaine des fonctions de deux variables qu'on représente par

$$\vec{a}'_u(u, v); \quad \vec{a}'_v(u, v).$$

138. Dérivée d'une fonction composée. — Considérons une fonction $\vec{a}(u, v)$ admettant des dérivées partielles continues dans un certain domaine. Soit m_0 un point de ce domaine et un chemin passant par m_0, sur lequel u et v sont des fonctions d'une certaine variable t, admettant elles-mêmes des dérivées; sur le chemin, $\vec{a}$ devient une fonction composée de t (n° 133).

La dérivée de la fonction vectorielle composée a pour expression

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Il faut naturellement, dans cette formule, prendre les valeurs des diverses fonctions du premier et du second membre pour $t = t_0$ (c'est-à-dire au point m_0, ou pour les valeurs u_0, v_0 de u et v).

Effectivement considérons une valeur t de la variable voisine de la valeur t_0 et soient u, v les valeurs correspondantes. Formons le quotient de l'accroissement de la fonction composée par l'accroissement de la variable, et écrivons-le, en suivant l'artifice classique employé dans la démonstration pour les fonctions scalaires

$$\frac{\vec{\ }\qquad \vec{\ }\qquad v_0)}{t - t_0} = \frac{\vec{a}(u, v) - \vec{a}(u, v_0)}{v - v_0}\frac{v - v_0}{t - t_0}$$
$$\frac{\ \ u, v_0) - \vec{a}(u_0, v_0)}{u - u_0}\frac{u - \ }{t - t_0}$$

Le second membre contient quatre rapports; évaluons d'abord la limite du premier.

La différence $\vec{a}(u, v) - \vec{a}(u, v_0)$ peut être considérée comme l'accroissement de la fonction $\vec{a}(u, x)$ d'une variable x, lorsque x passe de v_0 à v; appliquons-lui la formule de Taylor limitée au premier ordre et *supposons pour cela l'existence d'une dérivée de la fonction* $\vec{a}'_v(u, v)$ limitée supérieurement en module au voisinage de u_0, v_0.

L'expression de la différentielle totale permet d'étudier l'effet d'un *changement de variables*. Supposons u et v fonctions de deux autres variables indépendantes x, y. Sur un chemin donné $u, v; x, y$ sont des fonctions simultanées; on peut appliquer à u et v la règle des fonctions composées, de sorte que

$$du = u'_x . dx + u'_y . dy;$$
$$dv = v'_x . dx \cdot \qquad . dy.$$

Sur ce même chemin la différentielle de $\vec{a}$ est égale à la différentielle totale; en y remplaçant du et dv par les valeurs précédentes, on obtient l'expression de $\vec{da}$ en fonction de dx, dy

$$\vec{da} = (\vec{a}'_u . u'_x + \vec{\ } \qquad) . dx \cdot \quad (\vec{a}'_u . u'_y$$

Par ailleurs on doit avoir

$$\vec{da} = \vec{a}'_x\, dx + \vec{a}'_y\, dy,$$

les coefficients de dx et dy étant les dérivées partielles de $\vec{a}$ par rapport à x et y. Comme ces deux expressions de $\vec{da}$ doivent être égales quels que soient dx et dy on en tire

Rappelons que, si x, y sont des variables indépendantes, on doit pouvoir les exprimer en fonction de u, v et leurs différentielles dx, dy doivent pouvoir s'exprimer en fonction de du, dv, sur tout chemin, c'est-à-dire qu'on peut résoudre les équations linéaires précédentes en dx, dy; donc le déterminant

doit être différent de o au point m_0 et dans son voisinage (1).

Ce déterminant qu'on représente par

est le « *déterminant fonctionnel* » de u, v par rapport à x, y.

On sait que la condition donnée dans le texte comme nécessaire est aussi suffisante : si au voisinage de m_0 le déterminant fonctionnel n'est pas nul, et si u, v sont fonctions *uniformes* de x, y, inversement x, y sont fonctions *uniformes* de u, v.

différentielle, il suffit de différentier la différentielle totale; on obtient

$$\overrightarrow{{}^2 a} = d\left(\overrightarrow{a'_u}\right).du + d\left(\overrightarrow{a'_v}\right).dv + \overrightarrow{a'_u}.d^2$$

d'où, en explicitant les différentielles des dérivées premières (¹):

$$d^2\vec{a} = \overrightarrow{a''_{u^2}}.du^2 + 2\,\overrightarrow{a''_{uv}}.du.dv + \overrightarrow{a''_{v^2}}.dv^2 + \overrightarrow{a'_u}.d^2u + \overrightarrow{a'_v}.d^2v;$$

ces calculs s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur; on peut calculer de proche en proche les différentielles successives : $\overrightarrow{d^3a}$, $\overrightarrow{d^4a}$,....

Ces expressions se simplifient beaucoup quand u et v dépendent linéairement de la variable t, parce qu'on peut poser

$$du = h\,dt, \qquad dv = k\,dt, \qquad d^2u = d^2v = \ldots = 0.$$

On a alors

$$\overrightarrow{da} = \left(h\overrightarrow{a'_u} + k\overrightarrow{a'_v}\right)dt,$$

en usant du procédé symbolique (bien connu pour les fonctions scalaires) qui consiste à remplacer dans le développement du second membre une expression telle que $\left(\overrightarrow{a'_u}\right)^i\cdot\left(\overrightarrow{a'_v}\right)^j$ par le vecteur dérivé

De ces expressions, on déduit en particulier *la formule de Taylor*

(¹) Pour en déduire une expression qui soit indépendante des différentielles secondes de u et v, on voit qu'il suffit de multiplier intérieurement ce vecteur $d^2\vec{a}$ par un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{a'_u}$, $\overrightarrow{a'_v}$, par exemple $\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v}$, on a ainsi :

$$\left(\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v}\right).d^2\vec{a} = \left[\overrightarrow{a''_{u^2}}.\left(\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v}\right)\right].du^2 + 2.\left[\overrightarrow{a''_{uv}}.\left(\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v}\right)\right].du.dv$$

nous retrouverons cette expression au n° 156.

Si l'on considère un domaine (C), de surface S, formé par un contour (γ) entourant un point m_0, le quotient de l'intégrale par l'aire

a pour limite $\vec{a}(u_0, v_0)$ lorsque le contour (γ), devenant de plus en plus petit, tous ses points tendent vers m_0.

2° Supposons le contour de (C) rencontré [1] en deux points d'abscisses $u_1 < u_2$ par une parallèle à l'axe des u dont l'ordonnée v reste comprise entre $\beta < \beta'$ et en deux points d'ordonnées $v_1 < v_2$, par une parallèle à l'axe des v, dont l'abscisse u reste comprise entre $\alpha < \alpha'$; l'intégrale double est égale au résultat du calcul des deux intégrales définies successives :

$$\int_\beta^{\beta'} dv.\left[\int_{u_1(v)}^{u_2(v)} \vec{a}(u, v).du\right] \quad \text{ou} \quad \int_\alpha^{\alpha'} du.\left[\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \vec{a}(u, v).dv\right].$$

143. Fonctions vectorielles de plusieurs variables. Champs de vecteurs. — Les diverses définitions et règles précédentes s'étendent aux fonctions vectorielles de trois ou d'un plus grand nombre de variables scalaires.

Dans le cas des fonctions vectorielles de trois variables $\vec{a}(u, v, w)$, on peut figurer un système de valeurs des variables (u_0, v_0, w_0) par un point m_0 d'un certain espace, ayant ces nombres pour coordonnées par rapport à trois axes convenables. Il est souvent commode de représenter une détermination de la fonction vectorielle correspondant à u_0, v_0, w_0, par un vecteur $\overrightarrow{m_0 A_0}$ équipollent à $\vec{a}(u_0, v_0, w_0)$ ayant pour point d'application m_0. L'ensemble des vecteurs ainsi obtenus quand le point m_0 varie dans un certain domaine constitue *un champ de vecteurs* défini dans ce domaine.

La notion de « chemin » se généralise, mais non celle d'hodographe.

Pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables, on définit encore les dérivées partielles; la règle de dérivation des fonctions

[1] S'il n'en était pas ainsi on peut décomposer le domaine (C) en domaines partiels vérifiant cette propriété. L'équivalence des deux définitions s'établit comme pour les intégrales de fonctions scalaires.

composées est toujours exacte, ainsi que la notion qui en résulte de « différentielle totale »; de même pour les dérivées successives, la différentielle seconde et les intégrales multiples, *triples* ou *n-uples*.

II. — SURFACES ET PLANS TANGENTS.

144. Plan tangent et normale en un point simple d'une surface. — Considérons une surface S, définie comme l'hodographe d'une fonction vectorielle de deux variables u, v

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{a}(u, v).$$

Un point A, correspondant aux valeurs u_0, v_0 des paramètres, est dit « simple » sur la surface [ou plus exactement sur la « nappe » de surface ([1])] si les deux dérivées partielles de $\vec{a}$ ont en ce point un produit extérieur non nul

$$\vec{w} = \overrightarrow{a'_u}(u_0, v_0) \wedge \overrightarrow{a'_v}(u_0, v_0) \neq 0.$$

En un point simple A *d'une surface* S, *le lieu des tangentes à toutes les courbes, tracées sur* S *et passant en* A, *est un plan mené par* A *perpendiculairement au vecteur* $\vec{w}$, *produit extérieur des dérivées partielles*. Ce plan est appelé *le plan tangent en* A, la parallèle au vecteur $\vec{w}$, menée par A, est *la normale*, le vecteur $\vec{w}$ lui-même est un « *vecteur normal* » à S en A (*fig.* 63).

Effectivement, le plan P perpendiculaire à $\vec{w}$ contient déjà les parallèles menées en A aux vecteurs $\overrightarrow{a'_{u_0}}$, $\overrightarrow{a'_{v_0}}$, qui sont les tangentes (n° 137) aux courbes $v = v_0$, $u = u_0$. Considérons une autre courbe (C) passant par A; sur cette courbe, u, v sont fonctions d'un paramètre t, la dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par rapport à t est donnée par le

([1]) En anticipant un peu sur la suite, voici un exemple qui éclaire la signification du mot « nappe »; considérons un cône (n° 147) ayant comme « directrice » une lemniscate (n° 118) et comme sommet un point pris hors du plan de cette courbe; au point double de la lemniscate, se croisent deux « nappes » de la surface.

théorème des fonctions composées (n° 138)

Si $(u'_t)_0$, $(v'_t)_0$ ne sont pas simultanément nuls, cette dérivée n'est pas nulle; elle est parallèle à la tangente à (C) (n° 82) et l'égalité précédente montre qu'elle est perpendiculaire au vecteur $\vec{w}$ (c'est-à-dire encore parallèle au plan défini par $\overrightarrow{a'_{u_0}}$ et $\overrightarrow{a'_{v_0}}$).

Si $(u'_t)_0$ et $(v'_t)_0$ sont simultanément nuls, la dérivée $\dfrac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ est nulle en A, qui est alors un point singulier de (C). Pour obtenir la tangente à (C), formons les dérivées successives de $\overrightarrow{OM}$ et cherchons la première qui ne soit pas nulle. Soit p le plus petit nombre tel que l'une au moins des dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de u et v par rapport à t ne soit plus nulle en A; les dérivées successives de $\overrightarrow{OM}$ sont aussi nulles jusqu'à l'ordre p et la $p^{\text{ième}}$ est

$$\frac{d^p(\overrightarrow{OM})}{dt^p} = \frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial u}\cdot\frac{d^p u}{dt^p} + \frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial v}\cdot\frac{d^p v}{dt^p}.$$

Cette dérivée $p^{\text{ième}}$, qui est parallèle à la tangente à (C) au point singulier A (fin du n° 106), est toujours perpendiculaire au vecteur $\vec{w}$. Cette démonstration suppose seulement que u, v admettent des dérivées non indéfiniment nulles.

Formons l'équation du plan tangent et les équations de la normale en un point simple A; elles résultent immédiatement de l'expression du vecteur $\vec{w}$. Désignons toujours par P un « point courant » dans le plan tangent ou sur la normale; les équations sont :

plan tangent $\quad \overrightarrow{AP} \cdot \left[\dfrac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial u} \wedge \qquad \right)\Big]_A = 0,$

normale : $\quad \overrightarrow{AP} \wedge \left[\dfrac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial u} \wedge \qquad \right)\Big]_A = 0;$

Pour préciser cette propriété et notamment examiner la famille de courbes exceptionnelles, nous allons d'abord chercher à changer de paramètres u, v de façon à simplifier l'expression des dérivées partielles en A. Pour abréger l'écriture, nous pouvons toujours supposer $u_0 = v_0 = 0$. Ceci fait, imaginons par exemple $\overrightarrow{a'_{v_0}} = \overrightarrow{a'_v}(0, 0)$ non nul; on peut changer de paramètres de façon à annuler l'une des dérivées premières. Effectivement, posons

$$u = U; \qquad \alpha \text{ constante};$$

les nouvelles dérivées partielles sont (n° 139) :

En prenant pour α le rapport (¹) changé de signe du vecteur $\overrightarrow{a'_{u_0}}$ au vecteur $\overrightarrow{a'_{v_0}}$ parallèle et non nul, la dérivée partielle $\overrightarrow{a'_U}$ sera bien nulle en A, l'autre restant essentiellement différente de zéro.

Ce premier changement étant fait, continuons à appeler u, v les nouvelles variables; nous avons maintenant : $\overrightarrow{a'_u}(0, 0) = 0$, $\overrightarrow{a'_v}(0, 0) \neq 0$. Si le vecteur $\overrightarrow{a''_{u^2}}(0, 0)$ est alors parallèle à $\overrightarrow{a'_{v_0}}$, on peut encore changer de variables de façon à l'annuler à son tour; après cette opération, on peut recommencer sur le vecteur $\overrightarrow{a'''_{u^3}}(0, 0)$, s'il est parallèle à $\overrightarrow{a'_{v_0}}$, et ainsi de suite. Établissons cette propriété par récurrence : *supposons toutes les dérivées partielles de* $\vec{a}$ *par rapport à* u, u^2, ..., u^{n-1} *nulles en* A *et la dérivée* $n^{\text{ième}}$ *parallèle à* $\overrightarrow{a'_{v_0}}$, *montrons que l'on peut annuler cette dérivée.*

Il suffit de faire le changement de variables :

$$u = U; \qquad v = \frac{1}{n!}\alpha . U^n + V;$$

ux valeurs nulles de u, v correspondent des valeurs nulles de U, V. Sans expliciter entièrement les nouvelles dérivées successives, on voit

(¹) Ce rapport peut être nul si $\overrightarrow{a'_{u_0}} = 0$.

$\vec{\varepsilon}$ étant infiniment petit en même temps que u, v. Ceci acquis, pour étudier une courbe tracée sur la surface, et passant par A, donnons-nous sur cette courbe u, v fonctions d'un paramètre t, nul en A. Considérons les premiers termes des développements (supposés existants) de u, v en fonction de t :

ifiniment petits. On peut toujours prendre n assez grand pour que pn soit plus grand que q; en remplaçant dans la formule précédente u et v par ces valeurs on obtient les premiers termes du développement de $\overrightarrow{OM}$ sur la courbe

La tangente est toujours parallèle à $\vec{a}'_{v_0}$ (n° 106), donc à At :

Toutes les courbes passant par A *sont, sans exception, tangentes à la même droite* At.

Un tel point est obtenu notamment si $\vec{a}(u, o)$ a une valeur indépendante de u et par suite égale à $\vec{a}(o, o) = \overrightarrow{OA}$; les dérivées successives par rapport à u sont évidemment toutes nulles ([1]). C'est dire qu'au point A de la surface correspondent tous les systèmes de paramètres (u, o).

Il y a en A *une infinité de nappes de la surface qui se croisent et sur chacune d'elles toutes les courbes sont tangentes à une même droite* At. *L'ensemble de ces droites* At *constitue une surface conique de sommet* A, *qui peut d'ailleurs se réduire à un plan ou à une droite. On dit que* A *est un « point conique » de la surface.*

On peut obtenir un point conique apparent par suite d'une mauvaise représentation de la surface. C'est le cas par exemple pour une surface plane rapportée à des coordonnées polaires ρ, θ. Le pôle O cor-

([1]) C'est même le seul cas, si l'on exclut, comme on l'a fait pour les courbes, les fonctions qui ont une infinité de dérivées nulles sans être constantes (note du n° 105).

respond à ρ nul et à toutes les valeurs de θ; à un système ($\rho = 0$, $\theta = \alpha$) correspondent toutes les courbes passant par l'origine et tangentes à la demi-droite Ot d'angle polaire α.

Point de rebroussement. — Examinons maintenant le cas, où après avoir fait, s'il y a lieu, un changement de paramètres, *toutes les dérivées successives par rapport à u sont nulles jusqu'à l'ordre r, la dérivée $r^{\text{ième}}$ n'étant ni nulle, ni parallèle à $\overrightarrow{a'_{v_0}}$.*

Dans l'application de la formule de Taylor on obtient cette fois un terme en u^r, dont l'exposant est déterminé :

$$\vec{a}(u, v) = \vec{a}(0, 0) + v.\overrightarrow{a'_{v_0}} + u^r.\left(\overrightarrow{a^{(r)}_{u^r}}\right)_0 + v.\vec{\varepsilon} + u^r.\vec{\eta}.$$

En substituant dans $\vec{a}$ les développements de u, v en fonction de t on obtient deux cas suivant que pr est supérieur ou au plus égal à q. Les développements sont dans chacun de ces cas :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(0, 0) + \overrightarrow{a'_{v_0}}.{}^{n} \ldots$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(0, 0) + \left(\overrightarrow{a^{(r)}_{u^r}}\right.$$

Dans le premier cas, c'est-à-dire si v est infiniment petit d'ordre assez petit par rapport à u, la courbe (C) est tangente à At; dans le second cas, la courbe (C) est tangente à une droite du plan déterminé par les vecteurs non parallèles $\overrightarrow{a'_{v_0}}$, $\left[\overrightarrow{a^{(r)}_{u^r}}\right]_0$.

Toutes les courbes passant par A *sont tangentes à la même droite* At, *sauf une famille de courbes pour lesquelles* A *est un point singulier; le lieu des tangentes à ces dernières courbes est un plan passant par* At.

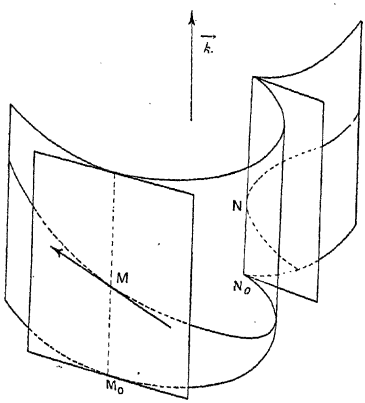
Point singulier d'ordre supérieur. — Dans le cas *où les dérivées partielles premières sont nulles en* A, sur toute courbe passant par A la dérivée première est nulle : A *est un point singulier pour chacune de ces courbes.*

Pour obtenir les tangentes prenons la dérivée seconde de $\overrightarrow{OM}$:

En faisant varier u', v', le lieu de la tangente, parallèle à cette dérivée, n'est pas en général un plan, mais un cône. Nous n'entrerons pas plus avant dans cette étude.

146. Surface cylindrique. — On appelle *surface cylindrique* une surface engendrée par le déplacement d'une droite indéfinie (*génératrice*) qui reste parallèle à une direction donnée, en s'appuyant sur une courbe donnée (*directrice*). On peut remplacer la directrice par toute autre courbe tracée sur la surface (rencontrant toutefois toutes les génératrices) et notamment par une *section plane* non parallèle à la direction des génératrices.

Fig. 64.



Soient $\vec{k}$ un vecteur fixe, parallèle à la direction donnée, M_0 un point variable sur la directrice, le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est fonction d'un paramètre u : $\overrightarrow{OM_0} = \vec{a}(u)$; la surface est l'hodographe de $\overrightarrow{OM}$, fonction de u, v, tel que

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}($$

Sur la surface, les courbes $u = \text{const.}$ sont les génératrices, les courbes $v = \text{const.}$ sont les courbes déduites de la directrice par une translation quelconque parallèle aux génératrices.

Les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ sont

La différentielle première de $\overrightarrow{OM}$ est

$$- \vec{r}.\rho').d\sigma + \vec{p}. \qquad (\vec{p} = \vec{k} \wedge \vec{r});$$

le coefficient de $d\sigma$, dérivée de $\overrightarrow{OM}$ lorsque σ varie seul, est le vecteur unitaire $\vec{u}$, tangent à la méridienne du point considéré dans le sens des σ croissants :

$$\vec{u} = \vec{k}.z' + \vec{r}.\rho'.$$

Le vecteur normal à la surface en un point A est le produit extérieur des coefficients de $d\sigma$ et $d\varphi$:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{p}.\rho;$$

il est dans le plan méridien, puisque perpendiculaire à $\vec{p}$, et normal à la méridienne, puisque perpendiculaire à $\vec{u}$:

La normale à une surface de révolution en un point A *est la normale à la méridienne qui passe par* A. — Les normales à la surface en tous les points d'un même parallèle rencontrent donc l'axe en un même point U; les plans tangents le coupent aussi en un même point T.

Il y a exception si ρ est nul, le point générateur étant sur l'axe de révolution. Comme pour le sommet d'un cône ce point correspond à tous les couples de valeurs ($\rho = 0$, θ) : c'est un point conique.

Comme cas particuliers des surfaces de révolution citons :

Le *cylindre de révolution* (ρ constant égal à R); c'est l'hodographe de

$$\overrightarrow{OM} = \vec{k}$$

Le *cône de révolution*, engendré par une droite rencontrant l'axe en O; on a $\rho = mz$, d'où l'expression de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{k}.z + mz.\vec{r} = z.(\vec{k} + m.\vec{r}).$$

La *sphère*, engendrée par la rotation d'une circonférence de dia-

mètre Oz, de sorte que $\rho = a.\sin\theta$, $z = a.\cos\theta$; c'est l'hodographe de

$$\overrightarrow{OM} = a.\left(\vec{k}.\cos\theta + \vec{r}.\sin\theta\right).$$

Les angles θ, φ, que l'on fait ainsi correspondre à un point de la sphère, sont précisément ceux que l'on a introduits au n° 57 sous le nom de *colatitude* et de *longitude* pour définir une droite dirigée. Les points sur l'axe sont faussement coniques, un changement de représentation les rend ordinaires.

149. Surface réglée. — On appelle surface réglée une surface engendrée par le déplacement d'une droite (*génératrice*) dépendant d'un paramètre. C'est l'hodographe du vecteur variable

comme on le voit en partant de l'expression paramétrique linéaire d'une droite indiquée au n° 77 et en y supposant les coefficients vectoriels fonctions d'un paramètre (¹). Les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ sont :

$$\vec{b}'(u) + v.\vec{a}'(u), \qquad \vec{a}(u),$$

et la normale en un point de paramètres u, v est parallèle au teur

$$\vec{w} = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}'\right) + v.\left(\vec{a} \wedge \vec{a}'\right) = \overrightarrow{w_0} + v.\overrightarrow{w_\infty}.$$

Sur une même génératrice (correspondant à u constant) $\overrightarrow{w_0}$ et sont déterminés et perpendiculaires à la génératrice; $\vec{w}$ dépend linéairement du paramètre v.

Si $\overrightarrow{w_0}$ et $\overrightarrow{w_\infty}$ ne sont pas parallèles, $\vec{w}$ reste constamment parallèle à leur plan, donc perpendiculaire à la génératrice; il passe une et une seule fois par toute direction de ce plan lorsque v varie de $-\infty$ à $+\infty$ (²). Par conséquent, *le plan tangent en un point* M *contient la*

(¹) En particularisant ces fonctions on retrouve la surface cylindrique et la surface conique.

(²) Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'il y a une et une seule valeur de v

forme $\vec{k}.u$ (en supposant D menée par O, parallèlement à $\vec{k}$), et $\vec{a}(u)$ parallèle à P. La surface est l'hodographe de

$$\overrightarrow{OM} = \vec{k}.u \qquad \vec{n}.\vec{a}(u) = 0,$$

$\vec{n}$ normale à P. Le *conoïde* est *droit* si P est perpendiculaire à D, c'est-à-dire si $\vec{n} = \vec{k}$.

III. — COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

151. **But du présent paragraphe.** — L'étude des courbes tracées sur une surface a fait l'objet de nombreuses recherches depuis les géomètres de la fin du XVIII^e siècle. Il semble au moins commode d'introduire dans cette étude les notations vectorielles. Les dimensions de cet Ouvrage ne nous permettent pas d'esquisser cette introduction, déjà réalisée actuellement d'ailleurs par de nombreux chercheurs. Nous nous contenterons de reprendre pour les courbes tracées sur une surface et passant par un point donné A les notions d'arc et de courbure étudiées au Chapitre précédent.

Nous nous donnerons une courbe par l'expression des coordonnées curvilignes u, v d'un de ses points en fonctions simultanées d'un paramètre; et nous supposerons, en général, que ces fonctions admettent des dérivées non nulles simultanément au point étudié. Pour étendre les résultats obtenus ainsi à des courbes tracées sur la surface, mais définies par des conditions géométriques, il faudra au préalable vérifier que ces courbes remplissent bien les conditions « analytiques » précédentes, ou s'il n'en est pas ainsi étudier directement la question, comme on l'a fait, au n° 144 pour le plan tangent.

Vérifions que ces conditions analytiques sont remplies en particulier pour une section plane non tangente. D'une façon précise : *si l'on considère un point ordinaire* A *d'une surface* (S) *et un plan* (P) *passant par* A *et non tangent à* (S), *ce plan rencontre la surface suivant une courbe* (C); *sur cette courbe les coordonnées curvilignes u, v sont des fonctions simultanées d'un même paramètre et l'on peut choisir ce paramètre de façon que les dérivées de u et v ne soient pas toutes les deux nulles au point* A. Considérons la

surface (S) hodographe de la fonction et le plan (P) défini par l'équation (n° 72)

$$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = \vec{n}.\overrightarrow{OA}.$$

En remplaçant $\overrightarrow{OM}$ par $\vec{a}(u, v)$, cette équation définit une relation entre u et v, et en différentiant on obtient

$$\vec{\ })\qquad (\vec{a}'_v.\vec{n}).dv = 0,$$

$\vec{n}$ n'étant pas normal à la surface l'une des parenthèses n'est pas nulle; le rapport $du : dv$ est par suite déterminé; l'une des différentielles est différente de o, l'autre restant finie.

152. Arc d'une courbe sur une surface. — En conservant ces notations considérons une courbe (C) définie par u, v fonctions d'un paramètre, sur la surface (S), hodographe de $\vec{a}(u, v)$. On obtient l'arc s de cette courbe en appliquant la formule du n° 97 et l'expression de la différentielle totale (n^{os} 138, 139)

$$ds^2 = (\vec{a}'_u.du + \vec{a}'_v.dv)^2 = (\vec{a}'_u)^2.du^2 + 2(\vec{a}'_u.\vec{a}'_v).du.dv + (\vec{a}'_v)^2.dv^2.$$

On écrit habituellement

E, F, G sont des fonctions scalaires de u, v ayant pour expressions

$$\partial u \qquad \frac{\overrightarrow{OM})}{\partial v}, \qquad G = \left[\frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial v}\right]^2.$$

Ces valeurs (¹) étant supposées calculées en fonction de u, v, la longueur d'un arc de courbe AB de la surface est donnée par l'intégrale définie

$$\int \qquad \overline{2F.du.dv + G.dv^2},$$

(¹) On en déduit immédiatement leurs expressions en fonction des dérivées des coordonnées.

u, v étant fonctions d'un paramètre sur la courbe, l'intégrale définie est prise entre les valeurs de ce paramètre qui correspondent à A et B.

Remarquons que le carré du module du vecteur normal $\vec{w}$ (défini au n° 144) s'exprime au moyen des coefficients E, F, G. En utilisant l'identité de Lagrange (n° 29) on obtient

$$(\vec{w})^2 = \left[\frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial u} \wedge\right.$$

$$\partial u \qquad \left[\frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial v}\right]^2 - \left[\right.$$

$$\mathrm{G} - \mathrm{F}^2.$$

Cette quantité $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ est donc positive, ce qui confirme que la forme quadratique en du, dv donnant ds^2 est essentiellement positive. On pose en général

$$\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{E.G} - \mathrm{F}^2},$$

de sorte que H est le module du vecteur $\vec{w}$.

Par suite, le vecteur

est un vecteur unitaire porté par la normale à la surface. La direction de ce vecteur est telle que le trièdre formé par : la tangente à la courbe $v =$ const. dans le sens des u croissants, la tangente à la courbe $u =$ const. dans le sens des v croissants et le vecteur $\vec{N}$ soit direct.

On dit couramment que la forme quadratique de différentielles

est le « *ds^2 de la surface, rapportée au système de coordonnées u, v* » ; les fonctions de u et v : E, F, G et accessoirement H, sont les *coefficients du ds^2*.

153. Angle de deux courbes d'une surface. — Pour donner une nouvelle application de cette forme et de ces coefficients, considérons deux courbes (C) et (C′) tracées sur (S) et passant par A;

désignons par d et δ les différentielles prises respectivement sur ces deux courbes au point A. Les vecteurs unitaires portés par leurs tangentes sont respectivement

$$\frac{d(\overrightarrow{\mathrm{OM}})}{ds} = \frac{\overrightarrow{a'_u}.du + \overrightarrow{a'_v}.dv}{\sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du \ldots \quad \mathrm{G}\,dv^2}},$$

$$\frac{\quad}{\delta s} = \frac{\quad}{\sqrt{\mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\,\delta v^2}}.$$

Considérons l'angle V de ces vecteurs unitaires, dans le plan tangent orienté par rapport au vecteur $\vec{w}$ ou $\vec{\mathrm{N}}$ (c'est-à-dire dans le sens qui fait passer des u croissants aux v croissants). Cet angle est ainsi défini à un multiple de 2π près : c'est par définition l'angle des deux courbes (C) et (C′) au point A.

Le cosinus de cet angle est le produit intérieur des vecteurs unitaires précédents; donc [1]

$$\cos \mathrm{V} = \frac{(\overrightarrow{a'_u}.du + \overrightarrow{a'_v}.dv).(\overrightarrow{a'_u}.\ldots}{\sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}\sqrt{\mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\ldots}}$$

$$\ldots + \ldots \qquad \overline{\ldots\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\,\delta v\ldots}$$

Le sinus de cet angle est la mesure du produit extérieur de ces mêmes vecteurs unitaires, sur la normale au plan orienté (n° 28).

Formons ce produit extérieur,

$$\frac{\ldots}{ds} \wedge \frac{\delta(\overrightarrow{\mathrm{OM}})}{ds} \qquad \frac{\quad}{ds.\delta s}(\overrightarrow{a'_u}.du + \overrightarrow{a'_v}.dv) \wedge (\overrightarrow{a'_u}.\delta\ldots$$

$$\frac{1}{ds.\delta s}(\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v}).(du.\delta v - dv.\delta\ldots$$

Le produit extérieur $\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v}$ étant égal à $\vec{\mathrm{N}}.\mathrm{H}$, on en déduit l'expression du sinus

$$\sin \mathrm{V} = \frac{\quad}{\sqrt{\mathrm{E}.du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \ldots} \qquad \overline{\ldots 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\ldots}}$$

(1) Le numérateur de cos V, qui est une forme « bilinéaire » en du, dv, δu, δv, est la *forme polaire* de la forme quadratique constituée par le ds^2.

En particulier, *les courbes sont tangentes si*

$$du.\delta v - dv.\delta u = 0,$$

c'est-à-dire si du, dv sont respectivement proportionnels à δu, δv.

On obtient directement ce dernier résultat en exprimant que $d(\mathrm{OM}$ et $\delta(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ sont parallèles ou encore déduits l'un de l'autre par multiplication par un scalaire.

Considérons notamment le cas des courbes coordonnées : $v =$ const. dans le sens des u croissants, $u =$ const. dans le sens des v croissants; on peut prendre

$$du = 1, \qquad dv = 0; \qquad \delta u = 0, \qquad \delta v = 1,$$

d'où le cosinus et le sinus de leur angle α

$$\sqrt{EG}, \qquad \frac{H}{\sqrt{EG}}.$$

Les courbes coordonnées sont rectangulaires si $F = 0$ et réciproquement.

134. Exemples de ds^2. — Considérons d'abord le cas d'une *surface plane* sur laquelle nous prendrons comme coordonnées curvilignes u, v les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires Ix, Iy de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. La surface est ainsi l'hodographe de la fonction

on obtient immédiatement le ds^2

et les coefficients sont

II

En cherchant le cosinus et le sinus de l'angle de deux droites dirigées contenues dans le plan, on retrouve naturellement les formules du n° 45.

Cette expression se simplifie si l'on prend pour $\vec{a}(u)$ un vecteur unitaire sur chaque génératrice $\left(\text{de sorte que } \vec{a}'.\vec{a} = 0\right)$, et pour origine des v, un point N défini par $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \vec{b}(u)$, décrivant une trajectoire orthogonale des génératrices $\left(\text{de sorte que } \vec{b}'.\vec{a} = 0\right)$. Les courbes coordonnées deviennent ainsi rectangulaires (propriété qu'on retrouvera au n° 162), et le ds^2 devient

$$(\vec{\ } \quad \vec{\ })^2 \qquad dv^2.$$

155. Surfaces applicables. — Supposons qu'on ait établi une certaine correspondance entre les points M et M' de deux surfaces (S) et (S'). On peut alors considérer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$ comme fonctions de deux mêmes paramètres u, v. Est-il possible que, dans cette correspondance, à tout arc de courbe $\widehat{\mathrm{AB}}$ tracée sur (S) corresponde sur (S') un arc $\widehat{\mathrm{A'B'}}$ *de même longueur?*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les intégrales donnant les arcs soient égales quels que soient les chemins AB; il en est par suite de même des éléments de ces intégrales; les ds^2 devant être identiques, il faut et il suffit que leurs coefficients soient égaux :

$$) = \mathrm{E}'(u, v), \qquad\qquad (u, v) = \mathrm{G}'(u, v).$$

S'il en est ainsi les formules du n° 153 montrent que la correspondance conserve non seulement les longueurs, mais encore les angles.

On dit que deux surfaces vérifiant ces conditions sont «*applicables*» *l'une sur l'autre.* Si la correspondance a lieu entre des points d'une même surface, on dit qu'elle est applicable sur elle-même par cette correspondance.

Comme exemples de surfaces applicables, nous avons trouvé au numéro précédent que la surface cylindrique a le même ds^2 que le plan; dans cette application aux génératrices et aux sections droites du cylindre correspondent des droites rectangulaires du plan. La surface conique a aussi le même ds^2 qu'un plan rapporté à des coordonnées polaires : dans l'application, les génératrices et les sections sphériques du cône correspondent aux demi-droites issues de I et aux circonférences de centre I du plan.

Le numérateur est quelquefois appelé la « *seconde forme différentielle fondamentale* » de la surface (le ds^2 étant la première). En laissant le second membre sous sa forme vectorielle, non explicitée, on a encore

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\vec{w}}{H}\cdot\frac{d^2\left(\overrightarrow{OM}\right)}{ds^2} = \frac{\vec{N}.d^2\left(\overrightarrow{OM}\right)}{ds^2};$$

$\vec{N}$ désigne le vecteur unitaire sur la normale à la surface, dans le sens de $\vec{w}$; mais la formule reste vraie, si l'on prend pour $\vec{N}$ le vecteur opposé, à condition de prendre toujours pour θ l'angle $\left(\vec{N}, \vec{n}\right)$. On peut l'écrire sous une forme générale, commode dans certains cas, en désignant par $\vec{N}'$, un vecteur unitaire normal à la surface ([1]), mais de sens quelconque

[illegible]

Cette formule n'est, bien entendu, applicable qu'autant que $\cos\theta$ n'est pas nul, c'est-à-dire tant que la normale principale à la courbe n'est pas perpendiculaire à la normale à la surface, ou encore que le plan osculateur à la courbe n'est pas tangent à la surface. Elle ne s'applique pas notamment au cas de la section de la surface par son plan tangent (déjà écarté d'ailleurs par l'énoncé du n° 151). Elle ne s'applique pas non plus aux courbes d'un plan.

157. **Théorème de Meusnier.** — Considérons, sur une surface, des courbes passant par un point A et ayant toutes une *même tangente* At. Elles correspondent à la même valeur du rapport $du : dv$ (n° 153). Prenons comme plan de figure le plan perpendiculaire à At, donc normal à toutes les courbes (C) considérées; il contient le vecteur $\vec{N}$ normal à la surface. Ceci posé, dans la relation du numéro précédent, le second membre, étant homogène en du, dv, conserve la même valeur pour toutes les courbes (C) : donc pour toutes ces

---

([1]) Le numérateur du second membre est une forme différentielle qui a été utilisée par divers auteurs de préférence à la forme $\vec{w}.d^2\left(\overrightarrow{OM}\right)$. On obtient ses coefficients en divisant D, D′, D″ par H ou — H.

ce centre de courbure P_0 et celle qui donne la position d'une courbe sur la surface par rapport au plan tangent

$$D.du^2 + 2.D'. \quad \cdot D''.dv^2$$

On peut essayer de simplifier ces formules en prenant des coordonnées u, v convenables et en cherchant par exemple à faire disparaître les termes D' et F. C'est notamment ce qu'on a réalisé dans l'exemple des surfaces de révolution (numéro précédent) pour lesquelles on a obtenu

Nous nous contenterons d'étudier succinctement, d'après les formules générales, les divers cas qui peuvent se présenter en les éclairant par l'exemple des surfaces de révolution.

L'inverse de $\overline{AP_0}$ est une fraction du second degré par rapport au quotient $du:dv$; le dénominateur est essentiellement positif, et ne s'annule pas : la fraction a par suite un minimum et un maximum. La variation du signe du numérateur de $\overline{AP_0}$ et du produit $\vec{w}.\overrightarrow{AM}$ dépend de la quantité

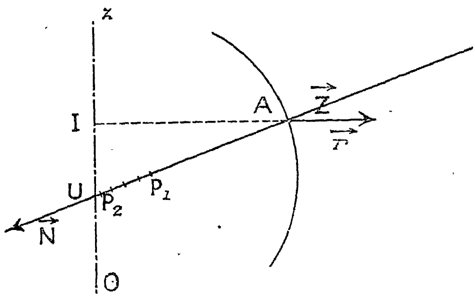
qui est un scalaire, fonction de u, v. Dans l'exemple de la surface de révolution, cette quantité est égale à

elle est du signe de

1° Si $D'^2 - D.D''$ *est négatif*, le numérateur et le produit intérieur conservent un signe constant. Toute courbe tracée sur la surface (S) est, au voisinage de A, d'un même côté du plan tangent, qui par suite ne contient pas de points de (S) voisins de A; AP_0 conserve aussi le

même signe, n'est jamais infini (son inverse n'étant pas nul) et varie entre un minimum et un maximum. Donc les sections normales n'ont pas de point d'inflexion en A et leurs centres de courbure varient entre deux positions extrêmes P_1, P_2, d'un même côté de A. On dit que le point A est *elliptique*.

Fig. 68.



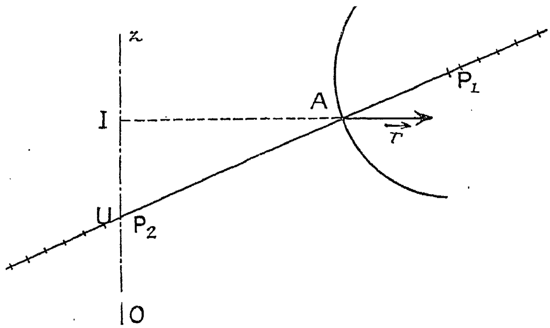
Cette circonstance se produit pour la surface de révolution si $\vec{r}.\vec{N}$ est négatif, c'est-à-dire si l'angle de la normale à la méridienne avec IA est obtus, ou encore si la concavité de la méridienne est dirigée vers l'axe de révolution; les positions extrêmes P_1 et P_2 du centre de courbure (¹) sont d'ailleurs le centre de courbure P_1 de la méridienne (correspondant à $d\varphi = 0$) et le centre de courbure P_2 ou U de la section plane normale à la méridienne (correspondant à $d\sigma = 0$).

2° Si $D'^2 - D.D''$ *est positif*, le numérateur et le produit intérieur ont un signe positif lorsque le rapport $du:dv$ est compris entre certaines limites, et un signe négatif en dehors de ces limites. Les courbes dont les tangentes sont comprises dans un certain angle sont d'un côté du plan tangent, les autres sont de l'autre côté; d'une façon abrégée la surface est de part et d'autre de son plan tangent ou encore le traverse. Quant à AP_0 il devient infini pour deux valeurs du rapport et reste par suite extérieur à l'intervalle de ses valeurs extrêmes. Il y a deux sections normales admettant A comme point d'inflexion, le centre de courbure des autres reste à l'extérieur d'un segment P_1P_2. On dit que le point A est *hyperbolique*.

(¹) Sur les figures 70 à 73 on a barré de hachures transversales le segment de la normale sur lequel se déplace le centre de courbure des sections normales.

Cette circonstance se produit pour la surface de révolution si le

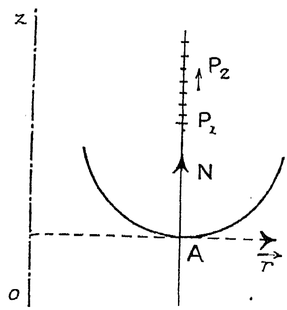
Fig. 69.



produit intérieur $\vec{r}.\vec{N}$ est positif, c'est-à-dire si la concavité de la méridienne en A est à l'opposé de l'axe de révolution.

3° Si $D'^2 - D.D''$ *est nul*, le numérateur et le produit intérieur, qui sont des carrés, conservent un signe constant sauf pour une seule valeur du rapport $du:dv$ pour laquelle ils s'annulent. Les courbes

Fig. 70.



tracées sur la surface sont toutes d'un même côté du plan tangent sauf peut-être celles qui sont tangentes à une certaine direction privilégiée. Le maximum — ou minimum — de AP_0 est infini; le centre de courbure P_0 se déplace sur une demi-droite; une seule section a une inflexion en A. On dit que le point A est *parabolique*.

Cette circonstance se produit pour la surface de révolution, lorsque l'un des trois facteurs $\vec{r}.\vec{N}$, $\frac{1}{R_0}$ ou ρ s'annule.

IV. — FAMILLES DE COURBES.

161. Trajectoires. — Considérons une surface (S) définie comme l'hodographe d'une fonction vectorielle de deux variables u, v :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u, v).$$

Si l'on donne à v une valeur constante v_0, $\overrightarrow{OM}$ devient fonction de u seul et son hodographe est une courbe tracée sur (S) que nous désignerons par C_{v_0}; on dit que l'ensemble des courbes C_v est *une famille de courbes*, *sur* (S), *de paramètre* v.

Une courbe de la famille est définie par une valeur v_0 du paramètre v et sur cette courbe un point est défini par une valeur u_0 du paramètre u. On définit de même la famille de courbes C_u de paramètre u.

D'une façon plus générale si l'on fait un changement de variables

$$u = f(\lambda, \mu), \qquad v = g(\lambda, \mu),$$

$\overrightarrow{OM}$ devient fonction de λ, μ et la famille de courbes de paramètre λ s'obtient en donnant à λ une valeur constante et en considérant l'hodographe de $\overrightarrow{OM}$ fonction de μ seul. Nous nous contenterons, en général, de considérer les familles de courbes de paramètre u ou v; on peut toujours se ramener à ce cas par un choix convenable de variables et de notations.

Supposons qu'à chaque valeur d'un paramètre t on fasse correspondre une courbe de la famille C_v (v variable avec t) et sur cette courbe un point M de paramètre u (u peut être constant). Le lieu de ce point M est appelé une « *trajectoire* » *de la famille* C_v.

Une trajectoire des C_v est caractérisée par u et v fonctions simultanées de t, la fonction v au moins n'étant pas constante. En particulier C_{u_0} est une trajectoire des C_v ($u = u_0$, $v = t$), et C_{v_0} est une trajectoire des C_u ($u = t$, $v = v_0$).

162. Trajectoire orthogonale. — *On appelle trajectoire orthogonale d'une famille de courbes* C_v *le lieu* Γ *d'un point* M *de* C_v, *tel qu'en chaque point* M, Γ *et* C_v *aient des tangentes rectangulaires.*

D'une façon plus brève, en tenant compte de ce qui précède, Γ est une « trajectoire » de C_v orthogonale à C_v.

Pour une trajectoire Γ, caractérisée par u, v fonctions d'un paramètre, la tangente est en général définie par le vecteur

$$d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{a'_u}.du + \overrightarrow{a'_v}.dv;$$

la tangente à la courbe C_v est parallèle au vecteur $\overrightarrow{a'_u}$. La condition de perpendicularité est

$$(\overrightarrow{a'_u})^2.du + (\overrightarrow{a'_u}.\overrightarrow{a'_v}).dv = 0.$$

C'est une relation différentielle qui a en général une infinité de solutions.

Cherchons notamment les trajectoires orthogonales d'une famille de droites constituant une surface réglée (n° **149**) (qui peut être un plan), caractérisée par la fonction

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u, v) = \quad \vec{}$$

Posons $\overrightarrow{OH} = \vec{B}(v)$: sur la droite dirigée qui passe par H, parallèle au vecteur unitaire $\vec{A}$ et de même sens, u est la mesure du vecteur $\overrightarrow{HM}$.

L'équation des trajectoires orthogonales des droites $v =$ const. est

$$0 = (\overrightarrow{A})^2\, du + (\vec{B}'. \qquad \cdot\, u\overrightarrow{A'}.\vec{A})\, dv = du + \vec{B}'.\vec{A}.dv,$$

d'où

$$= \overline{HM} = -$$

Les diverses trajectoires se déduisent de l'une d'entre elles en ajoutant une constante à u, c'est-à-dire en portant sur la droite variable, à partir du point M qui engendre la première trajectoire, une longueur MM' constante. Cette propriété comprend comme cas particulier la propriété des courbes planes parallèles (n° **111**) [1].

[1] On a signalé cette même propriété au sujet du ds^2 des surfaces réglées (n° 154). Si dans la représentation ci-dessus on prend pour $\vec{B}(v)$ une fonction dont l'hodographe est une trajectoire orthogonale des génératrices $(\vec{B}'.\vec{A} = 0)$, le ds^2 n'a plus de terme en $du.dv$; c'est dire que toutes les courbes $u =$ const. sont orthogonales aux génératrices.

163. Enveloppe d'une famille de courbes. — On dit qu'*une famille de courbes* C_v *a une enveloppe* (E) *si l'on peut trouver sur chaque* C_v *un* (ou plusieurs) *point* M *dont le lieu* (E), *lorsque* v *varie, soit tangent à* C_v *en* M. L'enveloppe (E) est une trajectoire des C_v tangente à C_v.

La méthode du numéro précédent s'applique à la recherche de l'enveloppe : il suffit d'écrire le parallélisme au lieu de l'orthogonalité des tangentes ; d'où la relation entre u, v :

$$o = a'_u \wedge \left(\overrightarrow{a'_u}.\iota \qquad \cdot \overrightarrow{a'_v}. \qquad = (\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v}).dv.$$

Supprimons la solution évidente $dv = o$ qui consiste à faire varier le point M sur une courbe C_v déterminée ; l'enveloppe, si elle existe, est caractérisée par la relation « en termes finis » entre u, v :

$$\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v} = o.$$

Cette condition équivaut à deux relations scalaires en u, v ; par suite elle n'est en général satisfaite que par un nombre fini de solutions et non par u, v fonctions simultanées d'un paramètre. D'ailleurs les points qui vérifient cette relation sont « singuliers » sur la surface, hodographe de $\vec{a}$ (n° 145).

Examinons le cas où il existe sur la surface une infinité de tels points singuliers, c'est-à-dire où il existe une courbe (E) dont tous les points vérifient la relation précédente. Considérons un point M_1 de (E) de coordonnées curvilignes u_1, v_1 ; en ce point, la tangente à (E) (comme à toute courbe de la surface qui passe en M_1) est définie par le vecteur différentielle totale

$$d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{a'_u}(u_1, v_1).du + \overrightarrow{a'_v}(u_1, v_1).dv.$$

Ce vecteur, s'il n'est pas nul, est parallèle à la direction commune des vecteurs $\overrightarrow{a'_u}(u_1, v_1)$, $\overrightarrow{a'_v}(u_1, v_1)$, quels que soient du et dv.

Par suite toute courbe de la surface, passant par M_1, y est tangente à (E) ou admet M_1 comme point singulier. Réciproquement d'ailleurs si une courbe de la surface a un point singulier P, comme en ce point $d\left(\overrightarrow{OM}\right)$ est nul, les dérivées partielles $\overrightarrow{a'_u}$, $\overrightarrow{a'_v}$ sont nécessaire-

ment parallèles et P est sur (E); cette démonstration suppose toutefois que u' et v' ne sont pas nulles simultanément.

En appliquant ces résultats à toutes les courbes d'une même famille C_λ (non nécessairement C_u ou C_v) on peut dire que :

La courbe (E) (*si elle existe*), *dont tous les points vérifient la relation*

$$\vec{a}'_u \wedge \vec{a}'_v = 0,$$

est l'enveloppe et le lieu des points singuliers de toute famille (¹) *de courbes de la surface.*

Il peut se faire que pour une famille de courbes il n'y ait que des points singuliers isolés; (E) est alors exclusivement l'enveloppe de ces courbes; inversement, pour certaines familles, (E) peut être exclusivement un lieu de points singuliers et être exceptionnellement tangent à certaines courbes isolées.

Nous allons examiner dans ce qui suit quelques cas particuliers où existent effectivement des enveloppes.

164. Familles de courbes dans un plan. — Supposons le vecteur $\vec{a}(u, v)$ constamment parallèle à un plan. Le point M, défini par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u, v),$$

reste dans un plan fixe (P). Les vecteurs $\vec{a}'_u$, $\vec{a}'_v$ sont parallèles à ce

(¹) Il est intéressant de remarquer que l'on est conduit à la même équation de définition de l'enveloppe si l'on part d'un autre système de coordonnées curvilignes. Soit en effet un système λ, μ tel que u et v soient fonctions *uniformes* de λ, μ, et réciproquement. Les dérivées partielles de $\vec{a}$ par rapport à chaque système de paramètres s'expriment en fonction des dérivées par rapport à l'autre système :

$$\vec{a}'_\lambda = \vec{a}'_u u'_\lambda \cdot$$

Le parallélisme de a'_λ, a'_μ entraîne celui de a'_u, a'_v, et réciproquement.

En retranchant et divisant par $v - v_0$ on trouve

$$\left(\frac{du'}{?}\right)_0 - \left(\frac{du}{dv}\right)_0\Big] - \overrightarrow{a'_{v_0}} + \vec{\eta}.$$

Comme $\vec{\eta}$ est un infiniment petit, la somme des deux premiers termes doit être nulle, ce qui exige que $\overrightarrow{a'_{u_0}} \wedge \overrightarrow{a'_{v_0}}$ soit nul. Le point limite est bien sur (E) (1).

Indiquons encore la règle pour trouver l'enveloppe lorsque les courbes de la famille sont définies par une « équation » entre les coordonnées de leurs points

$$f(x, y, v) = 0.$$

Une telle équation définit x, y, et par suite $\overrightarrow{OM}$, en fonction d'un certain paramètre u et du paramètre v. En dérivant on obtient

$$= 0,$$

Le parallélisme des dérivées partielles entraîne la proportionnalité de x'_u, y'_u à x'_v, y'_v et réciproquement. Donc

$$f'_v(x, y, v) = 0.$$

Cette équation, jointe à la première, définit la courbe (E), en donnant par exemple x, y en fonction du paramètre v.

165. Mouvement de l'ellipsographe. — Nous allons appliquer ce qui précède à un exemple géométrique de familles de courbes dans un plan. Considérons un segment de droite AB de longueur invariable $2l$ dont les extrémités A et B décrivent respectivement deux droites rectangulaires Ox, Oy. Le milieu I de ce segment décrit une circonférence de centre O, de rayon l, et pour fixer la position de la

(1) La réciproque est évidemment plus malaisée à établir, puisqu'en plus des points caractéristiques, la courbe (E) contient les points singuliers eux-mêmes. On peut toutefois établir la propriété suivante : *si un point* N_0 *de* (E), *correspondant aux valeurs* u_0, v_0 *des paramètres, n'est pas singulier sur* C_{v_0}, *on peut trouver sur la courbe* C_v, *v voisin de* v_0, *un point* N *tel que le vecteur* $\overrightarrow{NN_0}$ *soit un infiniment petit d'ordre supérieur à* 1 *par rapport à* $(v - v_0)$.

de droites dans un plan, représentée par la fonction

$$\overrightarrow{OM} = \vec{b}(v) + u.\vec{a}(v).$$

L'enveloppe (E) est définie par l'équation

Les produits extérieurs étant portés par la normale au plan, ceci définit en général u en fonction uniforme de v; par conséquent, sur chaque droite, il y a un et un seul point M de (E). Comme M n'est pas singulier sur la droite, cette droite est la tangente en M à (E). Le point M est aussi l'unique point caractéristique de la droite, c'est-à-dire son intersection avec la droite infiniment voisine.

En approfondissant ces résultats on peut faire l'étude d'une courbe engendrée par ses tangentes. Il est notamment intéressant d'examiner le cas du point M rejeté à l'infini $\left(\vec{a} \text{ et } \overrightarrow{a'} \text{ parallèles}\right)$ et le cas de M indéterminé $\left(\vec{a}, \overrightarrow{a'} \text{ et } \overrightarrow{b'} \text{ parallèles}\right)$; dans ce second cas la droite correspondante fait entièrement partie de l'enveloppe (E) et peut être considérée comme une « tangente stationnaire » à (E).

Nous nous contenterons d'examiner un cas simple qui conduit à des formules assez usitées. Considérons une droite D définie par le vecteur normal unitaire $\vec{r}$, faisant l'angle φ avec Ox, et par sa distance h à O, supposée fonction connue de φ. En employant les notations maintes fois utilisées, on peut représenter un point de la droite par la fonction de φ et λ :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}.h(\varphi) + \vec{p}.\lambda,$$

λ est la distance de M au pied H de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur D. L'enveloppe est définie par

$$0 = p \wedge ($$

λ est ainsi déterminé en fonction de φ et l'enveloppe (E) est le lieu du point E défini par

$$\vec{E} \quad \vec{} \quad \vec{}$$

La normale à cette enveloppe s'obtient en menant par E une paral-

lèle au vecteur $\vec{r}$, d'où l'équation

μ.

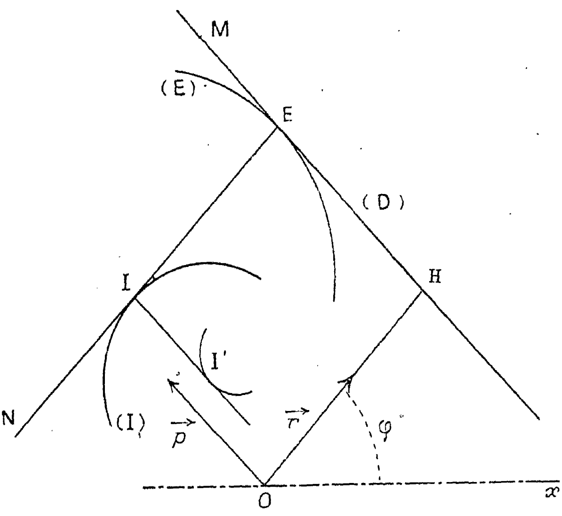
En cherchant l'enveloppe de cette nouvelle droite on obtient, pour déterminer μ, l'équation

L'expression

$$\mu = -(h + h''),$$

qu'on obtient ainsi, n'est autre que la distance $\overline{\mathrm{IE}}$ du point de contact E

Fig. 73.



de la droite D avec son enveloppe, au centre de courbure I de cette enveloppe en E [1]. On peut naturellement continuer; constituer la développée de (E), le centre de courbure et la développée de cette développée et ainsi de suite.

[1] Ce calcul est développé actuellement dans la plupart des Cours de Mathématiques spéciales (*voir* par exemple le *Traité* de M. Haag, t. II, p. 329).

Le rayon de courbure de (E) a évidemment pour valeur

$$R = \overline{EI} = -\mu = h(\varphi) + h''(\varphi).$$

De cette expression résulte une conséquence intéressante : *quand on connaît le rayon de courbure d'une courbe plane* (E) *en fonction de l'arc* $s = \widehat{E_0E}$, *cette courbe est déterminée à un déplacement près.* La relation

$$R = R(s)$$

s'appelle l'*équation intrinsèque de la courbe.*

Nous pouvons toujours supposer qu'on compte l'arc s dans le sens de φ croissant $\left[\text{ce qui revient à prendre } \vec{p} \text{ comme vecteur unitaire sur la tangente à (E)}\right]$, on a (n° 99)

$$R(s) = ds$$

et

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0 ds$$

on en déduit par inversion l'expression de s en fonction de $\varphi - \varphi_0$; soit alors $R(s) = R_1(\varphi - \varphi_0)$; intégrons l'équation

$$= R_1(\varphi - \varphi_0),$$

on obtient $h(\varphi)$ avec deux nouvelles constantes arbitraires :

$$h_1(\varphi - \varphi_0) + A\cos\varphi + B\sin\varphi;$$

en reportant cette expression de $h(\varphi)$ dans l'équation vectorielle de (E), on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \vec{r}h_1(\varphi - \varphi_0) + \vec{p}h'_1(\varphi - \varphi_0) + A(\vec{r}\cos\varphi - \vec{p}\sin\varphi) + B(\vec{r}\sin\varphi + \vec{p}\cos\varphi) \\ &= \vec{F}(\varphi - \varphi_0) + A\vec{i} + B\vec{j}.\end{aligned}$$

La courbe (E) est donc définie à une rotation près d'angle φ_0 autour de O et à une translation près définie par le vecteur $A\vec{i}$-

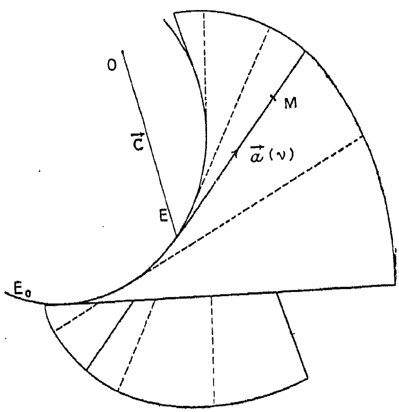
167. Surfaces développables. — Considérons une famille de droites

à $\vec{a}$, est confondue avec (D). Donc la surface réglée est le lieu des tangentes à la courbe (E); elle est représentée vectoriellement par

k étant le rapport scalaire (fonction de v) des deux vecteurs parallèles $\vec{a}$ et $\vec{c}'$.

On dit qu'*une telle surface réglée engendrée par les tangentes à une courbe* (E) *est une surface développable et la courbe* (E) *est appelée l'arête de rebroussement de la développable*. Cette arête est d'ailleurs le lieu des points de rebroussement (n° 145) des diverses génératrices.

Le plan tangent à une surface développable est le même en tous les points d'une génératrice et c'est le plan osculateur à l'arête de rebroussement en son point de contact avec la généra-



En effet, prenons comme coordonnées curvilignes μ et

Le vecteur normal à la surface

faut pouvoir caractériser en chaque point M de (C) une normale Mt dont le lieu soit une surface développable qui aura (E) comme arête de rebroussement. Appelons S l'arc de (C) et $\vec{U}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ les vecteurs unitaires de son trièdre de Frenet. Caractérisons la demi-droite Mt, par l'angle

$$(\vec{N}, Mt)$$

défini à un multiple de 2π près, dans le plan orienté $(\vec{N}, \vec{B})$; cet angle est une fonction de S à déterminer. La famille de droites Mt est représentée par la fonction de S et de $\mu = \overline{Mm}$

$$\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{OM} + \mu(\vec{N}.\cos\varphi + \vec{B}.\sin\varphi).$$

Pour que cette droite engendre une surface développable, il faut et il suffit (n° 167) que le coefficient de μ, sa dérivée et la dérivée de $\overrightarrow{OM}$, aient un produit mixte nul. Ces trois vecteurs sont

$$\vec{a} = (\vec{N}.\cos\varphi + \vec{B}.\sin\varphi), \qquad \vec{b}' = \vec{U},$$

$$\vec{a}' = (-\vec{N}.\sin\varphi + \vec{B}.\cos\varphi).\varphi' + \left[-\left(\frac{\vec{U}}{R} + \frac{\vec{B}}{T}\right)\cos\varphi + \frac{\vec{N}}{T}.\sin\varphi\right].$$

Formons le produit mixte

$$\vec{a}'.(\vec{b}' \wedge \vec{a}) = \vec{a}'.(\vec{B}.\cos\varphi - \vec{N}.\sin\varphi) = \varphi' - \frac{1}{T};$$

φ est donc donné en fonction de S par l'intégrale

$$\varphi = \int_0^S \frac{1}{T}.dS + \varphi_0.$$

A chaque valeur de φ_0 correspond une famille de normales formant une surface développable. Si l'on a construit une première famille, on en déduit toute autre en faisant tourner chaque normale d'un angle constant dans le plan normal en chaque point. Les *arêtes de rebroussement de toutes ces surfaces développables*, c'est-à-dire les enveloppes des diverses familles de normales, *sont appelées les « développées de la courbe* (C) »; (C) est ainsi une développante de l'une quelconque de ses développées.

CHAPITRE V.

VECTEURS GLISSANTS ET SYSTÈMES DE VECTEURS.

I. — VECTEURS GLISSANTS.

171. **Grandeurs vectorielles libres, glissantes et liées.** — On peut faire une distinction entre les grandeurs vectorielles, suivant la façon dont est définie « l'égalité » ou « l'équivalence » de deux grandeurs représentées par des vecteurs équipollents.

On dit qu'une grandeur vectorielle est « libre », ou, plus brièvement, qu'elle est un *vecteur libre*, si deux grandeurs de même espèce, représentées par deux vecteurs équipollents, peuvent être considérées comme égales ou « équivalentes » (en se plaçant, bien entendu, au point de vue de la signification physique ou géométrique de la grandeur envisagée).

Exemples. — *Un déplacement de translation* est caractérisé par un vecteur, joignant un point avant et après translation, ou indifféremment par tout vecteur équipollent.

La *vitesse de translation* d'un corps solide est caractérisée par la vitesse d'un point quelconque du corps solide, c'est-à-dire par un vecteur défini à une équipollence près.

Un *champ de forces uniforme* est caractérisé par la force en un point quelconque, c'est-à-dire par un vecteur défini à une équipollence près.

On dit qu'une grandeur vectorielle est un *vecteur glissant* si deux grandeurs de cette espèce, représentées par deux vecteurs équipollents, ne sont égales ou équivalentes, qu'autant qu'elles sont portées par une même droite.

On peut faire glisser une telle grandeur sur sa ligne d'action : d'où le nom de *vecteur glissant.*

Exemples. — Une *force appliquée à un corps solide* est un vecteur glissant. Elle est en effet représentée par un vecteur, dont il faut se donner la ligne d'action, le point d'application étant arbitraire sur cette ligne d'action.

La *vitesse de rotation* d'un corps solide peut être caractérisée par un vecteur *porté par l'axe de rotation* et de grandeur égale à la vitesse angulaire. C'est aussi un vecteur glissant.

On appelle enfin *vecteur lié*, une grandeur qui est caractérisée non seulement par un vecteur, mais encore par son point d'application. Pour que deux grandeurs de cette espèce soient égales, il faut qu'elles soient représentées par deux vecteurs complètement confondus (de même origine et même extrémité) [1].

Exemples. — Une *force appliquée à un corps déformable*, la *vitesse* d'un point dans un mouvement quelconque d'un corps, le *champ* en un point dans le cas d'un champ de forces quelconque, sont des exemples de vecteurs liés.

Dans le présent Chapitre nous allons nous occuper des grandeurs vectorielles glissantes. Nous en ferons l'étude indépendamment de la signification géométrique ou physique particulière de ces diverses grandeurs. En fait on applique cette étude, en Mécanique, aux deux problèmes différents de la composition des forces appliquées à un

---

[1] La classification des grandeurs vectorielles en libres, glissantes et liées, a été adoptée notamment par M. Appell dans son Traité et son Précis de Mécanique (Gauthier-Villars). Il convient de signaler que MM. Burali-Forti et Marcolongo y sont fortement hostiles :

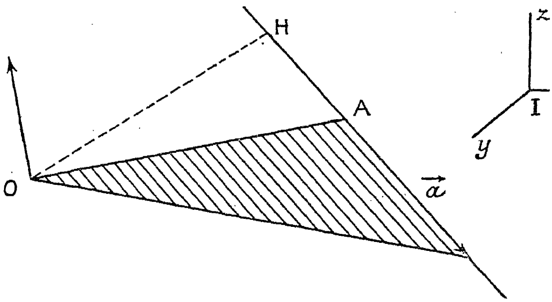
« On se met, écrivent-ils, en contradiction avec les lois de la logique et de la grammaire usuelles, lorsque au mot *vecteur* on ajoute les qualificatifs *glissant, lié à un point*, car on obtient ainsi des êtres qui ne sont plus des vecteurs. » [*Analyse vectorielle générale*, II (1913), Hermann et Mattei.]

Il y a sans doute là un peu d'exagération; nous avons néanmoins tenu compte de cette objection en explicitant que « vecteur glissant » était une abréviation, peut-être incorrecte (défaut commun des abréviations), en tout cas commode et courante, pour désigner une grandeur vectorielle pouvant glisser sur une droite.

corps solide, et de la composition des rotations dans la cinématique du solide.

172. Moment d'un vecteur glissant. — Soit un vecteur $\vec{a}$ (ou une grandeur vectorielle) d'origine A sur une droite (D). On appelle

Fig. 78.



moment par rapport à un point O *du vecteur* $\vec{a}$ *porté par* (D), ou plus brièvement « moment de $\vec{a}$ par rapport à O » : le produit extérieur

$$\mathrm{Mom}_O\,\vec{a} = \overrightarrow{OA} \wedge$$

D'après la définition du produit extérieur (n° 24), le moment est donc un vecteur $\overrightarrow{OG}$:

1° Dont la direction est perpendiculaire au plan passant par O et contenant (D);

2° Dont le sens est tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{OA}, \vec{a}, \overrightarrow{OG}\right)$ est direct;

3° Dont le module est le double de la surface du triangle construit sur OA et $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

On peut dire aussi que le sens de $\overrightarrow{OG}$ est tel qu'un mobile parcourant $\vec{a}$ de son origine à son extrémité tourne autour de $\overrightarrow{OG}$ dans le sens direct (n° 17). D'autre part, le module de $\overrightarrow{OG}$ est aussi égal au produit du module de $\vec{a}$ par la distance OH du point O à la droite (D).

C'est d'ailleurs la condition suffisante pour que ces deux systèmes de trois nombres soient respectivement les projections d'un vecteur et de son moment (n° 173).

Les coordonnées (x, y, z) de l'origine A du vecteur sont aussi les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$; par suite les composantes L, M, N du moment, produit extérieur de $\overrightarrow{OA}$ par $\vec{a}$, sont les mineurs de la matrice (n° 27) :

$$\begin{matrix} x & y & z \\ X & Y & Z \end{matrix}$$

soient

$$N = xY -$$

Il résulte de ce qui précède, qu'un vecteur glissant, rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires, est défini par six nombres liés par une relation.

On peut se demander pourquoi on n'essaie pas de préférence de caractériser un vecteur glissant par cinq nombres indépendants. La raison provient de ce que l'on est conduit à étudier, en même temps que les vecteurs glissants, de nouveaux êtres, dits systèmes de vecteurs (*voir* § II), comprenant les vecteurs glissants comme cas particuliers et caractérisés par des données analogues X, Y, Z; L, M, N qui ne vérifient plus nécessairement de relation.

176. Coordonnées de Plücker d'une droite. — Dans la Géométrie analytique des systèmes de droites, on a quelquefois avantage à caractériser une droite par un vecteur de longueur quelconque, porté par

---

(1) A partir de ces expressions on peut établir analytiquement les propriétés du moment précédemment démontrées :

1° Le moment est indépendant de la position du point x, y, z sur la ligne d'action, car il ne change pas si l'on ajoute à x, y, z des quantités proportionnelles à X, Y, Z;

2° Le moment est perpendiculaire au vecteur $(LX + MY + NZ = 0)$;

3° Si l'on se donne six quantités, vérifiant la relation précédente, les trois équations, considérées comme équations en x, y, z, ont une infinité de solutions :

On peut encore retrouver ainsi la règle du changement d'origine.

cette droite. Dans ces conditions, en adoptant une origine O, une droite est caractérisée par un système de deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{m}$ rectangulaires, définis au produit près par un scalaire ; $\vec{a}$ est parallèle à la droite et $\vec{m}$ est le moment par rapport à O d'un vecteur équipollent à $\vec{a}$, porté par la droite.

Au lieu de se donner les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{m}$ on peut se donner leurs projections a, b, c ; p, q, r sur trois axes rectangulaires issus de O (avec la condition $ap+bq+cr=0$) ; ces six nombres, définis à un facteur près de proportionnalité et vérifiant la relation précédente, sont ordinairement appelés les *coordonnées de Plücker de la droite.*

Ces deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{m}$ ou leurs projections s'introduisent dans les équations de la droite indiquées au n° 74. La droite définie à partir des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{m}$ peut en effet être représentée par l'équation vectorielle, caractérisant le lieu de M :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{m},$$

soit encore par les trois équations cartésiennes équivalentes :

$$\begin{aligned} cy - bz &= p, \\ az - cx &= q, \\ bx - ay &= r. \end{aligned}$$

Rappelons que ces équations sont compatibles à cause de la condition

$$\vec{a}.\vec{m} = 0 \qquad \text{ou} \qquad ap + bq + cr = 0.$$

177. **Théorème de Varignon.** — *Le moment par rapport à* O *de la somme géométrique de plusieurs vecteurs concourants en un point* A *est égal à la somme géométrique des moments de chacun des vecteurs.*

Cette propriété, connue sous le nom de théorème de Varignon, résulte immédiatement de la distributivité du produit extérieur par rapport à la somme géométrique (n° 25). Effectivement, soient $\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AC}$, ... les divers vecteurs concourants, le moment de leur somme est

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \ldots) = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AC}) + \ldots.$$

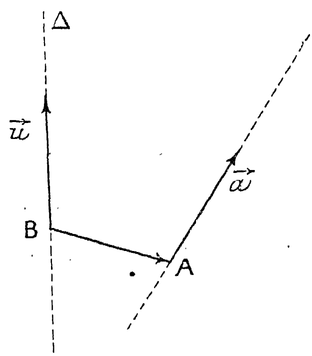
Chacune des parenthèses du second membre représente le moment de chacun des vecteurs, et le théorème est établi [1].

178. **Moment par rapport à un axe.** — Soient un axe ou droite dirigée Δ, et $\vec{u}$ le vecteur unitaire sur cet axe.

On appelle moment d'un vecteur glissant $\vec{a}$ *par rapport à l'axe* Δ, *la mesure de la projection sur cet axe du moment de* $\vec{a}$ *par rapport à un point* B *quelconque de l'axe.*

On obtient immédiatement l'expression de ce moment : si A est un point du support du vecteur glissant, le moment par rapport à B est $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{a}$; pour le projeter sur Δ, il suffit de multiplier intérieurement par $\vec{u}$, d'où l'expression du moment par rapport à Δ,

Fig. 79.



Ce moment est un *scalaire* axial ou polaire suivant que le vecteur $\vec{a}$

---

[1] On trouve dans les Traités élémentaires de Mécanique une démonstration du théorème de Varignon, qui n'est autre que la précédente à laquelle on incorpore la démonstration donnée au n° 26 de la distributivité du produit extérieur.

est lui-même polaire ou axial; il a les mêmes dimensions que le moment vectoriel.

Le moment s'exprime par un produit mixte (n° 32); on peut donc permuter circulairement l'ordre des facteurs et écrire :

$$\vec{u}.(\overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{BA}}.(\vec{a} \wedge \vec{u}) = \vec{a}.(\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BA}}),$$

sous cette dernière forme on voit qu'on ne modifie pas le produit en ajoutant à $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ un vecteur quelconque $\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$ parallèle à $\vec{u}$, de sorte que *le moment conserve bien la même valeur si l'on remplace* B *par un autre point* B′ *de l'axe.*

Sous la première forme on voit de même qu'on peut ajouter à $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ parallèle à $\vec{a}$, c'est-à-dire déplacer l'origine A du vecteur sur sa ligne d'action; ceci résultait d'ailleurs de la propriété signalée du moment (n° 173) par rapport à un point.

Le moment par rapport à Δ est égal au volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\vec{a}$ avec la convention de signe du n° 32. On peut l'exprimer en coordonnées cartésiennes par un déterminant :

$$\begin{matrix} {}' - x & y' - y & z' - \\ a & b & c \end{matrix}$$

(α, β, γ) sont les projections de $\vec{u}$, c'est-à-dire les cosinus directeurs de Δ; (x, y, z), (x', y', z') sont les coordonnées des points B et A; enfin a, b, c sont les composantes du vecteur $\vec{a}$.

Comme cas particulier remarquable, les projections du moment par rapport à O sur les axes issus de O sont aussi les moments par rapport à ces axes. On retrouve immédiatement leurs expressions données au n° 175, en utilisant les formules précédentes. Par exemple, pour l'axe des z, avec les notations indiquées, les projections de $\vec{u}$ sont (0, 0, 1); on peut placer B en O, les projections de $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ sont alors x, y, z; enfin appelons X, Y, Z les projections de $\vec{a}$; le déterminant précédent devient :

$$\begin{matrix} x & y & \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{matrix}$$

résultant par rapport à O *diminué du moment par rapport à* O *de la résultante générale appliquée en* O'.

Si l'on considère le moment résultant d'un système de vecteurs donné comme un vecteur lié au centre des moments P et qu'on le représente par un vecteur d'origine P

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}$$

on dit que ces vecteurs $\overrightarrow{PG}$, liés respectivement à leur point d'application, constituent un *champ de moments* [1].

De la règle de variation précédente, appliquée à deux points P et P', on déduit

$$\ldots - \overrightarrow{P'G'}) = \quad \ldots - \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\mathcal{R}}) - \quad \ldots \vec{\mathcal{R}})]$$

$$= \overrightarrow{PP'} . (\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{\mathcal{R}}) = 0.$$

La différence géométrique des moments $\overrightarrow{PG}$ et $\overrightarrow{P'G'}$ est normale à PP', ou encore

$$\overrightarrow{PP'} . \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PP'} . \overrightarrow{P'G'},$$

les moments d'un même système de vecteurs par rapport à deux points P *et* P' *ont les mêmes projections sur la droite* $\overrightarrow{PP'}$.

On peut établir que cette propriété est caractéristique d'un champ de moments, c'est-à-dire que si, à chaque point P de l'espace, on fait correspondre un vecteur $\overrightarrow{PG}$ de telle façon que, pour deux points P, P' quelconques, les projections de $\overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{P'G'}$ sur la droite $\overrightarrow{PP'}$ soient égales, ces vecteurs liés constituent un champ de moments [2].

---

[1] C'est un exemple des champs de vecteurs définis au n° 143.

[2] Considérons effectivement un point O et trois vecteurs unitaires, rectangulaires d'origine O :

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \qquad \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \qquad \overrightarrow{OK} = \vec{k},$$

soient $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{II'}$, $\overrightarrow{JJ'}$ les vecteurs correspondant aux points O, I, J. La condi-

Ces composantes sont des fonctions linéaires de x, y, z, mais le tableau des coefficients est *symétrique gauche*.

184. Invariants d'un système. — On appelle *invariants d'un système les deux scalaires*

Ces deux scalaires sont indépendants du choix du point O. C'est un fait évident pour le carré de la résultante générale; pour le produit intérieur, la vérification résulte de la formule du numéro précédent. On a effectivement, pour un point O′,

$$' = \vec{\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathfrak{M}_0} - \vec{\mathcal{R}}.(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\mathcal{R}} \qquad \vec{\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathfrak{M}}$$

le produit mixte étant évidemment nul.

Ces invariants, dont le nom est ainsi justifié, s'expriment en fonction des coordonnées du système : ce sont

$$(\vec{\mathcal{R}})^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad \vec{\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathfrak{M}_0} = X.L + Y.M + Z.N.$$

Ces expressions sont donc indépendantes de O et du système d'axes.

185. Moment d'un système par rapport à un axe. — *On appelle encore moment d'un système de vecteurs par rapport à un axe* Δ, *la mesure de la projection sur cet axe du moment résultant du système de vecteurs par rapport à un point* B *quelconque de l'axe.*

Appelons toujours $\vec{u}$ le vecteur unitaire sur l'axe; soient $\vec{\mathcal{R}}$ la résultante générale et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$ le moment résultant du système par rapport à un point O; son moment résultant par rapport à un point B de l'axe est

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_0} - \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathcal{R}},$$

sa projection sur Δ est donc

$$\vec{u}.(\overrightarrow{\mathfrak{M}_0} - \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathcal{R}}) = \vec{\imath} \quad \overrightarrow{\ } \qquad B \wedge \vec{\mathcal{R}}) = \vec{u}.\overrightarrow{\mathfrak{M}} \qquad \wedge u).$$

l'égalité

L'équivalence possède évidemment les deux propriétés essentielles, de l'égalité, rappelées au sujet de l'équipollence des vecteurs (n° 5).

187. **Opérations sur les systèmes de vecteurs.** — Dans plusieurs questions de Mécanique (distribution des vitesses dans un corps solide, composition des vitesses, forces appliquées à un corps solide) on est amené à considérer les systèmes de vecteurs comme de nouveaux êtres ayant une existence propre indépendamment des vecteurs glissants individuels qui les constituent. On ne fait pas alors de distinction entre deux systèmes équivalents (de même que dans le Chapitre I, à propos des opérations sur les vecteurs, nous n'avons considéré que des vecteurs définis à une équipollence près).

Un système de vecteurs (Σ), *défini à une équivalence près, est ainsi caractérisé :*

1° *Soit par sa résultante générale* $\vec{\mathcal{R}}$ *et son moment résultant* $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$ *par rapport à un point* O;

2° *Soit par son champ de moments* (c'est-à-dire l'ensemble de ses moments par rapport à tous les points de l'espace, cet ensemble vérifiant la propriété précisée au n° 183);

3° *Soit par ses six coordonnées* X, Y, Z, L, M, N *par rapport à trois axes.*

Nous allons d'abord définir des opérations sur les systèmes de vecteurs; ces définitions seront données à partir des ensembles de vecteurs, mais nous montrerons qu'elles sont invariantes si l'on remplace les systèmes par d'autres équivalents. Nous donnerons ensuite, pour le cas des systèmes finis de vecteurs, une nouvelle définition ou interprétation de l'équivalence. Enfin nous étendrons les diverses définitions au cas d'une distribution continue de vecteurs.

188. **Système nul.** — On dit qu'un système de vecteurs est nul lorsqu'il est équivalent à un système qui ne comprend aucun vecteur.

Un système nul a donc sa résultante générale et son moment

produit intérieur des vecteurs (n° 20)] :

L'*invariant* d'un système $\vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{M}}$ peut être considéré comme le demi-produit (ou demi-moment relatif) du système par lui-même

Le moment d'un système (Σ) par rapport à un axe Δ est le moment relatif du système (Σ) et du système (U) formé par le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par l'axe Δ. On retrouve ainsi l'expression de ce moment donnée au n° 185

$$(\Sigma)(\mathrm{U}) = \vec{u}.\vec{\mathcal{M}} + \vec{m}.\vec{\mathcal{R}}.$$

193. **Dérivée d'un système de vecteurs.** — De même qu'on a défini au n° 79 un vecteur fonction d'une variable t, on peut considérer un système de vecteurs fonction d'une variable t en imaginant que *les divers vecteurs du système et leurs lignes d'action dépendent d'une variable* t, *ou plus simplement que la résultante générale* $\vec{\mathcal{R}}$ *et le moment résultant* $\vec{\mathcal{M}}$ *par rapport à un point* O, *supposé fixe, sont des fonctions vectorielles de* t.

On voit immédiatement comment s'étend la notion de limite :

(Σ) tend vers (Σ_0), quand t tend vers t_0, si la différence (Σ_0) — (Σ) a une résultante générale et un moment résultant aussi petits que l'on veut en module, pourvu que l'on prenne la variable t suffisamment voisine de sa valeur limite

$$|\vec{\mathcal{R}} - \vec{\mathcal{R}_0}| \quad \text{et} \quad |\vec{\mathcal{M}} - \vec{\mathcal{M}_0}| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad |t - t_0| < \eta.$$

On étend par suite la notion de continuité (n° 80) et celle de dérivée (n° 82). La dérivée d'un système est un autre système dont la résultante générale et le moment résultant sont les dérivées des

vecteurs issus de A et admettant le précédent pour somme (on dit encore d'une façon plus brève : décomposition d'un vecteur en une somme de vecteurs concourants).

L'inverse d'une opération élémentaire est encore une opération élémentaire. Un cas particulièrement simple de ces opérations consiste à supprimer ou à ajouter dans un système deux vecteurs directement opposés (nº 9); la suppression revient en effet à faire glisser les deux vecteurs sur leur ligne d'action jusqu'à les amener à avoir même origine, puis à remplacer ces deux nouveaux vecteurs, concourants, par leur résultante qui est nulle; l'addition revient à faire les opérations inverses.

Les opérations élémentaires sont liées à l'équivalence par la propriété suivante :

Si l'on fait sur un système de vecteurs des opérations élémentaires, on le remplace par un système équivalent; inversement, si deux systèmes d'un nombre fini de vecteurs sont équivalents, on peut passer de l'un à l'autre en effectuant un certain nombre d'opérations élémentaires (1).

Démonstration. — La proposition directe est assez évidente : la première opération élémentaire n'altère évidemment pas la résultante générale, ni le moment résultant puisqu'elle n'altère aucun moment partiel. Les deux autres opérations ont pour effet, dans les sommes qui constituent la résultante générale et le moment résultant, de remplacer plusieurs vecteurs par leur somme effectuée, ou inversement un vecteur par d'autres dont il est la somme, ceci d'après le théorème de Varignon (nº 177), puisque dans la seconde ou troisième opération élémentaire on ne compose ou décompose que des vecteurs *concourants*.

Pour la proposition inverse, nous établirons successivement plusieurs points particuliers :

(1) Il ne semble pas qu'il y ait lieu d'attacher à cette propriété une importance exagérée. Elle justifie jusqu'à un certain point la définition de l'équivalence des systèmes d'un nombre fini de vecteurs. Elle ne s'étend plus aux distributions continues dont nous parlerons plus loin.

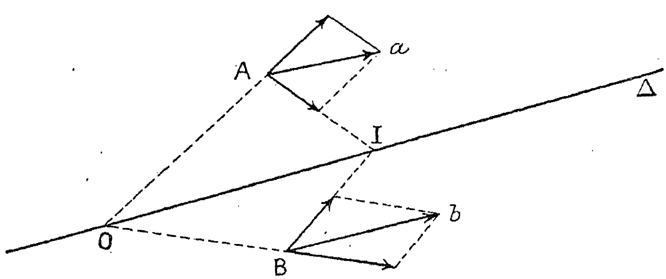
il y a au moins un des côtés du triangle OAB, soit par exemple AB, qui n'est pas confondu avec sa ligne d'action; en appelant A_i un point de la ligne d'action, non situé sur le côté AB, décomposons $\overrightarrow{f_i}$ en une somme de deux vecteurs portée par les droites distinctes AA_i, BA_i.

En effectuant ces opérations élémentaires pour chaque vecteur du système, on remplace le système par trois systèmes de vecteurs, les uns concourant en O, les autres en A, les derniers en B. En remplaçant chacun de ces systèmes par leur somme, ce qui est encore une opération élémentaire, on remplace bien le système proposé par trois vecteurs appliqués en O, A, B.

b. On peut toujours par des opérations élémentaires remplacer le système considéré par deux vecteurs, l'un appliqué en un point O arbitraire, l'autre appliqué en un point O′ choisi arbitrairement dans le plan mené par O perpendiculairement au moment résultant du système par rapport à O. (Si ce moment est nul, on peut choisir O′ tout à fait arbitrairement.)

Remplaçons d'abord, comme il vient d'être dit, le système de vecteurs par trois vecteurs en O, A, B. Soit Δ l'intersection des deux

Fig. 82.



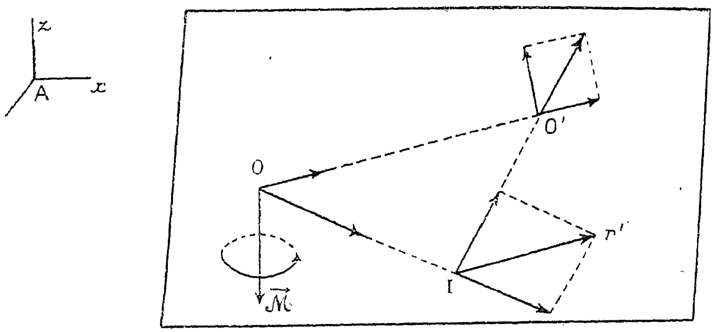
plans menés par O et contenant les vecteurs $\overrightarrow{Aa}$, $\overrightarrow{Bb}$ issus de A, B. Soit I un point de Δ; décomposons $\overrightarrow{Aa}$ en deux vecteurs dirigés suivant OA, IA et de même $\overrightarrow{Bb}$ en deux vecteurs dirigés suivant OB, IB. En faisant glisser ces vecteurs sur leurs lignes d'action, on obtient

en définitive trois vecteurs appliqués en O et deux en I, que l'on peut composer respectivement.

Cette méthode semble en défaut si O, I, A sont en ligne droite, mais il suffit alors de faire glisser $\overrightarrow{\mathrm{A}a}$ sur sa ligne d'action, de façon que son point d'application ne soit plus sur Δ. Ceci devient impossible si $\overrightarrow{\mathrm{A}a}$ est porté par Δ, mais alors on peut décomposer $\overrightarrow{\mathrm{A}a}$ en un vecteur équipollent appliqué en O et un vecteur nul en I.

On obtient donc ainsi dans tous les cas un vecteur en O, soit $\overrightarrow{\mathrm{O}r}$, et un vecteur en I, soit $\overrightarrow{\mathrm{I}r'}$. Ce système de deux vecteurs a même moment résultant par rapport à O que le système primitif, soit $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$.

Fig. 83.



Mais le moment résultant de ces deux vecteurs par rapport à O se réduit au moment de $\overrightarrow{\mathrm{I}r'}$ (le moment de $\overrightarrow{\mathrm{O}r}$ étant nul). Donc $\overrightarrow{\mathrm{I}r'}$ est situé dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$, mené par O (n° 172). Ceci acquis, soit O' un point arbitrairement choisi dans ce plan; décomposons $\overrightarrow{\mathrm{I}r'}$ en une somme de deux vecteurs dirigés, l'un suivant OI que l'on composera avec $\overrightarrow{\mathrm{O}r}$, l'autre suivant O'I. (Si O' est sur Ir' le premier vecteur sera nul.) Enfin, faisons une dernière simplification en remplaçant le vecteur en O' par une somme de deux vecteurs, l'un dirigé suivant OO' que l'on composera avec le vecteur en O, l'autre perpendiculaire à OO'.

En définitive, *on remplace le système par deux vecteurs, l'un en* O, *l'autre en* O' *et perpendiculaire à* OO'.

c. Soient maintenant deux systèmes équivalents (Σ), (Σ') : on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires.

Effectivement, soit $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ le moment commun par rapport à O des deux systèmes; choisissons un point O′ dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ mené par O. Par des opérations élémentaires, on peut remplacer (Σ) par deux vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{O'J}$, ce dernier perpendiculaire à OO′. On peut de même remplacer (Σ') par deux vecteurs $\overrightarrow{OI'}$, $\overrightarrow{O'J'}$ $\left(\overrightarrow{O'J'}\right.$ perpendiculaire à $\left.OO'\right)$. De l'égalité des moments résultants, il résulte que

$$\overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{O'J} = \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{O'J'};$$

comme $\overrightarrow{O'J}$ et $\overrightarrow{O'J'}$ sont tous deux perpendiculaires à OO′, ceci entraîne leur égalité

$$\overrightarrow{O'J} = \overrightarrow{O'J'}.$$

De l'égalité des résultantes générales, on déduit

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{O'J} = \overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{O'J'}, \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI'}.$$

Par conséquent on peut, par des opérations élémentaires, remplacer (Σ) et (Σ') par le même système de deux vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{O'J}$. On peut donc passer par des opérations élémentaires de (Σ) au système de deux vecteurs, et, en renversant la seconde suite d'opérations, passer de ce système à (Σ').

195. Distribution continue de vecteurs. — On dit couramment qu'une distribution continue de vecteurs est un système composé d'une « infinité de vecteurs infiniment petits », ayant encore une résultante générale et un moment résultant finis. On suppose en général que les vecteurs infiniment petits sont des vecteurs liés, c'est-à-dire ont des points d'application bien déterminés. Pour mettre sous une forme rigoureuse cette définition approchée, nous procéderons *a posteriori* comme pour les intégrales multiples (nº 142).

Examinons par exemple le cas d'une distribution en volume. Une distribution continue de vecteurs existant dans une région de l'espace est caractérisée par les propriétés suivantes :

Si l'on détache dans cette région de l'espace un domaine limité (C), entouré par une surface fermée, on sait définir pour ce domaine un système de vecteurs (Σ_C), caractérisé, par exemple, par sa résultante générale et son moment résultant pour un point O, soient $\overrightarrow{\mathcal{R}_C}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_C}$; ceci de telle façon que :

1° Si le domaine (C) est formé de la juxtaposition de deux domaines (C') et (C'') n'empiétant pas, le système relatif à (C) est la somme des systèmes relatifs à (C') et (C'')

2° Si l'on considère un petit domaine (γ) de volume V entourant un point A, le quotient du système relatif à (γ) par le scalaire V

a une limite, lorsque V tend vers o, tous les points de (γ) tendant vers A.

Pour définir cette limite, on peut se donner par exemple le système (Σ_γ) par sa résultante générale $\vec{\mathcal{R}}$ et son moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$ par rapport au *point intérieur* A. Le système limite sera caractérisé par une résultante générale et un moment résultant

$$\vec{r} = \text{limite}\,\frac{\vec{\mathcal{R}}}{V};$$

Ces vecteurs, fonctions de A, peuvent être appelés, en généralisant une locution habituelle, *résultante spécifique* et *moment spécifique* en A (c'est-à-dire résultante et moment par unité de volume en A).

En rapprochant ce qui précède de la définition donnée des intégrales multiples (nos 142, 143), on voit que si l'on connaît, en tout point A d'un domaine (C), la résultante spécifique $\vec{r}$ et le moment spécifique $\overrightarrow{m_A}$, la résultante générale et le moment résultant par rapport à O, pour ce domaine, sont donnés par les intégrales triples

$$\vec{\mathcal{R}} = \int\int\int_C \vec{r}.dx.dy.dz; \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \int\int\int_C \left(\overrightarrow{m_A} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{r}\right) dx.dy.dz.$$

Ces intégrales triples de vecteurs se calculent naturellement comme des intégrales triples de scalaires par trois intégrations simples successives. On peut encore calculer les six intégrales triples de scalaires obtenues en partant des « coordonnées » du système spécifique en A.

On suppose en général que le moment spécifique est nul; il y a cependant des exemples du contraire, notamment l'action exercée par un champ magnétique sur un aimant.

On a naturellement des définitions et formules analogues, pour une distribution en *surface* (*résultante* et *moment superficiels*, ou encore par unité de surface, en chaque point d'une certaine surface); et pour une distribution en *ligne* (*résultante* et *moment linéaires* ou par unité de longueur en chaque point d'une certaine courbe). Les intégrales correspondantes sont doubles ou simples.

196. **Opérations sur les systèmes continus.** — On ne peut songer, pour le cas d'une distribution continue, à justifier la définition de l'équivalence comme on l'a fait plus haut pour les systèmes d'un nombre fini de vecteurs; on pourrait tout au plus la considérer comme cas limite de ce qui se passe dans le cas d'un nombre fini de vecteurs. Encore ceci est-il tout à fait inexact, s'il existe des moments spécifiques.

Les diverses opérations se définissent comme pour les systèmes finis, puisqu'on peut les définir en n'introduisant que la résultante générale et le moment résultant.

Il est toutefois bon de remarquer que la somme de deux systèmes continus s'obtient encore en superposant les deux distributions, ceci à cause des propriétés évidentes d'additivité des intégrales, simples, doubles ou triples. On en déduit en particulier que la dérivée d'un système continu (les points d'application étant supposés fixes) s'obtient en dérivant en chaque point le système spécifique en ce point. Pour le produit, ou moment relatif, on est amené ainsi à des opérations plus compliquées, qui peuvent nécessiter jusqu'à des intégrales sextuples (à chaque point M de l'un des systèmes, il faut associer tous les points de l'autre système, ce qui fait une première intégrale triple, qu'il faut ensuite intégrer en faisant varier M dans le premier système, d'où une nouvelle intégrale triple). Il semble donc préfé-

(n° 30) : il existe une infinité de points I, formant une ligne droite parallèle à $\vec{\mathcal{R}}$, qui est la ligne d'action cherchée ([1]).

3° $\mathcal{R}.\mathcal{M} = 0$, $(\mathcal{R})^2 = 0$, *mais* $\mathcal{M}$ *non nul*. Ce cas a déjà été étudié, le système forme un *couple*.

4° $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}} = 0$. On a alors un *système nul*.

Dans les trois derniers cas, $\vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{M}} = 0$, on dit que le système est « *dégénéré* ».

200. Axe central d'un système de vecteurs. — Revenons au cas général et supposons qu'on se trouve dans le premier cas étudié $\left(\vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{M}} \text{ non nul}\right)$: *le système peut être décomposé en une somme de deux systèmes, l'un formé d'un vecteur unique appliqué en un point* I *convenablement choisi, l'autre d'un couple, dont le moment est parallèle au vecteur.*

Le lieu des points I est alors une droite, parallèle à la direction commune du vecteur et du moment; ce vecteur et ce moment restent invariables si I se déplace sur cette droite. *Cette droite s'appelle « l'axe central » du système de vecteurs.*

Effectivement, soient $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}_0$ la résultante générale et le moment résultant du système par rapport à un point O. Le moment par rapport à I est (n° 183)

$$\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{\mathcal{M}}_0 - \vec{OI} \wedge \vec{\mathcal{R}};$$

nous voulons qu'il soit parallèle à $\vec{\mathcal{R}}$, c'est-à-dire de la forme $k.\vec{\mathcal{R}}$, k étant un certain scalaire, on en déduit l'équation

$$\vec{\mathcal{M}}_0 - \vec{OI} \wedge \vec{\mathcal{R}} = k.\vec{\mathcal{R}} \quad \text{ou} \quad \vec{OI} \wedge \vec{\mathcal{R}} = \left(\vec{\mathcal{M}}_0 - k.\vec{\mathcal{R}}\right).$$

La seconde égalité est une équation de division géométrique; pour

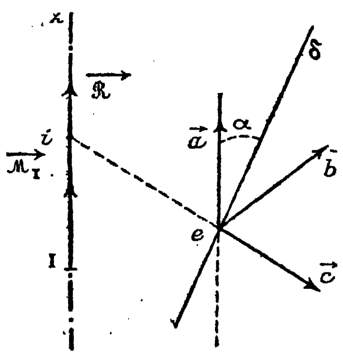
([1]) La réduction effective à un vecteur unique à partir d'un système donné comporte ainsi deux stades : (a) la recherche de la résultante générale et du moment résultant du système; (b) la résolution de la division géométrique.

On peut essayer de souder plus ou moins ces deux stades : c'est ce qu'on fait précisément en « Statique graphique ».

de réduction des systèmes (Σ) et (U) par rapport à un point O. L'équation précédente définit bien des droites et non des axes, car si elle est vérifiée pour (U), elle l'est aussi pour le système opposé, comme on le voit en remplaçant $\vec{u}$ et $\vec{m}$ par les vecteurs opposés.

Pour préciser les résultats prenons les éléments de réduction des systèmes pour un point de l'axe central de (Σ). Soient toujours $\vec{u}$, $\vec{m}$ les éléments de (U), ceux de (Σ) sont alors $\vec{\mathfrak{R}}$ et $k.\vec{\mathfrak{R}}$, et l'équation se réduit à

On peut se rendre compte de la distribution dans l'espace des droites définies par cette équation. Soit *ie* la perpendiculaire com-



mune à l'axe central I*z* et à une des droites δ de l'ensemble. Considérons en *e* le trièdre formé par le vecteur unitaire $\vec{c}$ prolongeant *ie*, le vecteur unitaire $\vec{a}$ parallèle à l'axe et de même sens que $\vec{\mathfrak{R}}$, enfin le vecteur directement perpendiculaire $\vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a}$. La droite (δ) est dans le plan de $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, appelons α l'angle $\left(\vec{a}, \vec{u}\right)$. On obtient immédiatement l'expression de $\vec{u}$ et du moment $\vec{m}$ pris par rapport au point *i* (en appelant *h* la mesure $\overline{ie}$)

$\vec{u} = \vec{a}.\cos\alpha + \vec{b}.\sin\alpha,$ $\vec{m} = ($ $\vec{u} = h(\vec{b}.\cos\alpha - \vec{a}.\text{si}$

La condition d'annulation du moment est par suite

$$o = \vec{a}.\left(k.\vec{u} + \vec{m}\right) = k.\cos\alpha - h.\sin\alpha,$$

d'où

$k \quad k$

Cette formule montre d'abord que l'angle α n'est défini qu'à un multiple de π près, ce qui détermine une droite et non un axe, fait déjà signalé. On voit en outre que l'inclinaison des droites (δ) ne dépend que de leur distance à l'axe central; si l'on a obtenu une droite (δ) toutes celles qu'on en déduit par rotation autour de l'axe central et translation parallèle à cet axe sont encore de moment nul.

La famille comprend notamment toutes les droites qui rencontrent l'axe central à angle droit; pour les autres, l'inclinaison sur l'axe central est d'autant moindre qu'elles en sont plus éloignées; elles tendent à devenir parallèles à l'axe en s'en éloignant indéfiniment.

Il est facile d'étudier la distribution des droites de moment nul si $\vec{\mathfrak{R}}.\vec{\mathfrak{M}} = o$. Dans le second cas, si le système est équivalent à un vecteur unique ($k = o$), les droites de moment nul sont toutes celles qui rencontrent ce vecteur unique (on peut encore dire que dans l'équation ci-dessus $k = o$ entraîne $\overline{ie} = o$ et α est alors indéterminé). Dans le cas du couple, les droites de moment nul sont toutes les droites perpendiculaires au moment du système. Enfin dans le dernier cas, système nul, toute droite est de moment nul.

202. Faisceau linéaire de systèmes. — On appelle *faisceau linéaire de systèmes de vecteurs*, l'ensemble de tous les systèmes

λ, λ' sont deux paramètres scalaires arbitraires [1], (Σ), (Σ') sont deux systèmes donnés, dont on suppose seulement que l'un n'est pas le produit de l'autre par un scalaire.

[1] Il est à remarquer que (Σ) et (Σ') peuvent ainsi être constitués par des grandeurs vectorielles de dimensions différentes, mais alors les scalaires λ, λ' doivent avoir des dimensions telles que les systèmes λ (Σ), λ' (Σ') aient mêmes dimensions

tral de $(\Sigma)]$ $\vec{u} = \rho\vec{\mathcal{R}}$, l'équation de condition devient

car $\overrightarrow{m_0}$ est alors nécessairement perpendiculaire à $\vec{\mathcal{R}}$; d'où, puisque $\vec{\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathcal{M}_0} \neq 0$, $\lambda = \frac{1}{\rho}$. La résultante du système dégénéré (G)

$$\vec{\mathcal{R}}$$

est alors nulle, sans que le moment résultant le soit : (G) est équivalent à un couple. On satisfait, formellement, aux équations en prenant $\lambda' = 0 \left|\overrightarrow{m'_0}\right| = \infty$; on peut dire que le vecteur unitaire $\overrightarrow{u'}$ est rejeté à l'infini.

Si (D) *est parallèle à l'axe central le système est équivalent à un vecteur porté par* (D) *et à un couple.*

Les équations précédentes se traduisent immédiatement en langage analytique. Soient X, Y, Z, L, M, N les coordonnées de (Σ) par rapport à trois axes quelconques; a, b, c, p, q, r les coordonnées de Plücker de la droite (D) par rapport aux mêmes axes, on détermine λ par l'équation

$$-\lambda(pX + qY + rZ + aL + bM + cN) + (XL + YM + ZN) = 0.$$

Les coordonnées du système $\lambda.(U)$ (vecteur porté par la droite D) sont alors

$$\lambda a, \quad \lambda b, \quad \lambda c, \quad \lambda p, \quad \lambda q, \quad \lambda r,$$

celles du système (G) (vecteur unique ou exceptionnellement couple) sont

$$X - \lambda a, \quad Y - \lambda b, \quad Z - \lambda c; \quad L - \lambda l, \quad M - \lambda m, \quad N - \lambda n.$$

204. **Notions sur la Géométrie des droites.** — L'étude des systèmes de vecteurs est en relation immédiate avec la Géométrie des systèmes de droites.

Supposons des droites définies par leurs coordonnées de Plücker

$$a, \quad b, \quad c; \quad p, \quad q, \quad r; \qquad (ap + bq + cr = 0)$$

[(a, b, c), (p, q, r) composantes d'un vecteur $\vec{u}$ sur la droite et de son moment $\vec{m}$ par rapport à l'origine O].

On appelle « *complexe linéaire de droites* » un ensemble de droites dont les coordonnées de Plücker vérifient une équation linéaire

On peut toujours considérer X, Y, Z, L, M, N comme les coordonnées d'un certain système de vecteurs, de sorte que tout complexe linéaire de droites peut être considéré comme l'ensemble des *droites de moment nul* d'un système de vecteurs, défini d'ailleurs au produit près par un scalaire.

Considérons un complexe linéaire défini à partir d'un système (Σ) non dégénéré. Soit (D) une droite n'appartenant pas au complexe, il lui correspond une droite (D′), non dans un même plan, telle que le système (Σ) soit équivalent à deux vecteurs portés par (D) et (D′)

(U) et (U′) étant les systèmes constitués par un vecteur unitaire porté respectivement par (D) et (D′).

Caractérisons une droite de moment nul de (Σ) rencontrant (D) par un système (V) formé d'un vecteur porté par cette droite; ce système vérifie les relations

$(V).(\Sigma) = 0$ [puisque c'est une droite de moment nul de (Σ)],
$(V).(U) = 0$ [puisque la droite rencontre (D)].

Donc on a

Par conséquent la droite rencontre (D′) et réciproquement :

Étant donné un complexe linéaire, à toute droite (D), *n'appartenant pas au complexe, correspond une droite* (D′), *telle que toutes les droites du complexe rencontrant* (D) *rencontrent aussi* (D′) *et réciproquement; ces deux droites sont dites conjuguées par rapport au complexe* ([1]).

([1]) Si (D) est parallèle à l'axe central, (D′) est rejetée à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'axe du couple (G); si (D) est une droite de moment nul, on peut dire qu'elle est confondue avec sa conjuguée (D′).

Considérons un plan (P); une droite (D) de ce plan, n'appartenant pas au complexe, a une conjuguée (D') qui n'est pas dans ce plan; (D') rencontre (P) en un point p (qui peut être rejeté à l'infini). Donc *toutes les droites du complexe situées dans* (P) *passent par* p [puisque, rencontrant (D), elles doivent rencontrer (D'), ce qui ne peut se produire qu'en p]. *Réciproquement toutes les droites du complexe passant par* p *sont dans* (P) [puisque, rencontrant (D'), elles doivent rencontrer (D)].

Les conjuguées de toutes les droites du plan (P) *passent par* p, *et inversement*. En effet, soient (D_1) une droite de (P) et (D'_1) sa conjuguée; les droites du complexe, situées dans le plan qui rencontrent (D_1), rencontrent aussi (D'_1) et passent par p; comme (D'_1) ne rencontre (P) qu'en un seul point, c'est nécessairement p.

La correspondance ainsi définie entre point et plan est réciproque : p *est appelé le foyer de* (P), *et* (P) *le plan focal de* p, *par rapport au complexe* (1).

Les plans focaux des points d'une droite (D) passent tous par sa conjuguée (D') (2).

Si le plan focal (P) d'un point p passe par un point q, le plan focal (Q) du point q passe par le point p.

On verra aisément ce que deviennent ces divers résultats dans le cas d'un complexe dégénéré : droites rencontrant une droite donnée ou droites parallèles à un plan donné (deuxième et troisième cas de dégénérescence des systèmes).

IV. — SYSTÈMES PARTICULIERS DE VECTEURS.

Nous allons examiner dans ce paragraphe quelques exemples parti-

(1) Si l'on introduit le système (Σ) dont les droites du complexe sont les droites de moment nul, le foyer p d'un plan (P) est le seul point de ce plan pour lequel le moment résultant est perpendiculaire au plan. En particulier, tout plan normal à l'axe central (Δ) de (Σ) a pour foyer le point où il est percé par (Δ). Pour tout plan parallèle à (Δ) le foyer est rejeté à l'infini : les droites du complexe contenues dans ce plan sont parallèles entre elles.

(2) Si (D) est parallèle à l'axe central, (D') est à l'infini : les plans focaux sont parallèles. En particulier si (D) est l'axe central, les plans focaux sont normaux à l'axe.

culiers de distributions de vecteurs, telles que les systèmes formés soient certainement dégénérés.

205. Vecteurs dans un même plan. — Considérons des vecteurs dans un même plan (P), formant soit un ensemble fini de vecteurs, soit une distribution continue, sur une ligne ou sur une surface plane; dans ce second cas nous supposerons les moments linéaires ou superficiels nuls, et les résultantes linéaires ou superficielles, en chaque point, situées dans le plan.

Prenons alors comme centre des moments un point du plan (P). Les moments de tous les vecteurs sont perpendiculaires au plan; le moment résultant est donc perpendiculaire au plan et par suite à la résultante générale, nécessairement parallèle au plan. Donc : *tout système de vecteurs situés dans un même plan est équivalent : ou bien à une résultante unique dans ce plan; ou bien à un couple, de moment perpendiculaire au plan; ou bien à un système nul.*

206. Vecteurs concourants. — Si des vecteurs ont tous une même origine O, leur système est équivalent à une résultante unique ou à un système nul, c'est là un fait évident.

On aboutit à une conclusion analogue, si l'on sait *a priori* que, par rapport à un certain point O, le système a un moment résultant nul. Le système est nécessairement équivalent à un vecteur unique passant par O, ou à un système nul.

207. Vecteurs parallèles. — Examinons encore le cas d'un système de vecteurs parallèles à une même droite. Dans le cas d'une distribution continue, qui peut être en ligne, surface ou volume, on suppose toujours les moments linéaires, superficiels ou spécifiques nuls, et les résultantes linéaires, superficielles ou spécifiques parallèles à la droite donnée.

La résultante générale est parallèle à la même droite, sa mesure est la somme des mesures, cette somme pouvant être, pour une distribution continue, représentée par une intégrale simple, double, ou triple.

Le moment résultant, somme de vecteurs perpendiculaires à la droite donnée, est aussi perpendiculaire à cette droite, par suite à la résultante générale, on se trouve encore dans l'un des trois cas de dégénérescence :

On aboutit à des formules analogues dans le cas d'une somme finie et d'une intégrale simple ou double.

En Mécanique on est amené à considérer des systèmes de vecteurs parallèles, comme ceux que nous venons de définir, dans l'étude des *systèmes pesants*. Les coefficients m_A, m_B, ... représentent les masses des points A, B, ... [ou bien le coefficient $\delta(A)$ représente la densité linéaire, superficielle ou spécifique au point A]; le vecteur $\vec{u}$ représente l'intensité de la pesanteur, supposée invariable dans l'étendue du système matériel envisagé; alors $m_A\vec{u}$ est le *poids* du point A [ou bien $\delta(A)\vec{u}$ est le poids de l'unité de longueur, de surface ou de volume au point A]; la somme (ou l'intégrale simple, double ou triple) des coefficients m est la *masse totale* M du système; la résultante

est le *poids total* du système; quelle que soit la direction de la pesanteur $\vec{u}$, la ligne d'action du poids total passe par un point fixe G du système matériel, qui se nomme son *centre de gravité*. On obtient encore des systèmes analogues dans l'étude des systèmes des *quantités de mouvement* ou des *forces d'inertie* pour un mouvement de translation d'un corps matériel.

CHAPITRE VI.

CINÉMATIQUE DU POINT ET DU CORPS SOLIDE.

Ce Chapitre est surtout destiné à illustrer la théorie des systèmes de vecteurs par son application à la Cinématique du corps solide. On exposera d'abord brièvement les définitions et résultats essentiels de la Cinématique du point, qui se rattache immédiatement à la théorie des fonctions vectorielles d'une variable.

I. — CINÉMATIQUE DU POINT.

209. **Repère et horloge.** — Un point est dit « *en mouvement* » par rapport à un corps solide pris comme *système de repère*, lorsque sa position par rapport à ce solide varie avec l'époque (ou le temps) indiquée par une horloge.

Le choix du système de repère et de l'horloge est entièrement arbitraire, il suffit de le fixer d'une manière précise dans chaque problème. Ce choix est indispensable; la définition d'un mouvement n'a aucun sens absolu, mais est essentiellement relative à un certain repère et à une certaine horloge. Toutefois s'il arrive de considérer simultanément divers systèmes de repère mobiles les uns par rapport aux autres (§ III), on suppose toujours, dans la pratique, que l'horloge (1) est la même pour tous ces repères de sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté à parler de la position des divers repères et des points mobiles par rapport à eux à une époque t.

Pour déterminer le mouvement d'un point M par rapport à un sys-

(1) On prend naturellement « horloge » dans un sens général : par exemple le mouvement de rotation de la Terre autour de la ligne des pôles.

tème de repère, on peut se donner, en fonction du temps t, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dont l'origine O est un point fixe du système

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(t).$$

On peut appliquer à cette fonction particulière les résultats généraux sur les fonctions vectorielles (Chap. III). Il suffira de préciser ici la signification particulière des éléments introduits.

On suppose toujours $\overrightarrow{OM}$ fonction continue de t, l'hodographe de $\overrightarrow{OM}$, lieu des points du corps solide avec lesquels M vient successivement en coïncidence, est la « *trajectoire* » de M; l'expression de l'arc de trajectoire en fonction du temps t est « *l'équation intrinsèque* » du mouvement.

On peut encore caractériser la fonction $\vec{a}(t)$ par ses projections sur trois axes Ox, Oy, Oz d'origine O et fixes dans le système de repère : on définit ainsi le mouvement par les *expressions des coordonnées x, y, z de* M *en fonction de t.*

210. **Vitesse d'un point.** — La dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à t est le *vecteur vitesse;* on lui donne en général comme origine la position de M à l'instant considéré

Ce vecteur vitesse est indépendant du point fixe O (n° 97); il est porté par la tangente à la trajectoire et a pour mesure $\frac{ds}{dt}$ sur cette tangente, orientée dans le sens des arcs s croissants (n° 82). Cette mesure est quelquefois appelée la « *vitesse scalaire* » du point.

Les composantes du vecteur vitesse sur les axes sont les dérivées, par rapport à t, des coordonnées de M : x'_t, y'_t, z'_t; on trouve au n° 93 les composantes en coordonnées polaires, dans le cas d'une trajectoire plane.

Si la vitesse scalaire $\frac{ds}{dt}$ est constante, l'équation intrinsèque du mouvement est linéaire :

$$s =$$

on dit que « *le mouvement est uniforme* ». Si le vecteur vitesse est constant, $\overrightarrow{OM}$ est une fonction linéaire de t (n° 99)

$$\overrightarrow{OM} = \vec{v}_0 . t + \overrightarrow{OM_0}.$$

Ce mouvement est rectiligne et uniforme (n° 77), et réciproquement.

211. Vitesse d'un vecteur. — Soit un vecteur $\vec{a}$, variable avec le temps par rapport au système de repère : on appelle « *vitesse de* $\vec{a}$ » sa dérivée par rapport au temps.

Deux vecteurs équipollents ont des vitesses équipollentes, équipollentes d'ailleurs à la différence des vitesses de leurs extrémités. Effectivement si l'on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

on en déduit en dérivant

$$\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{CD})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OA})}{dt} \quad \frac{d(\overrightarrow{OB})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OD})}{dt} - \frac{d(\overrightarrow{OC})}{dt}.$$

En particulier si l'on mène par un point fixe O un vecteur $\overrightarrow{ON}$ équipollent au vecteur variable $\vec{a}$, la vitesse du vecteur $\vec{a}$ est équipollente à la vitesse du point N.

Si l'on prend sur la droite qui porte $\vec{a}$ un sens positif, *la projection, sur l'axe ainsi déterminé, de la vitesse de* $\vec{a}$ *est égale à la dérivée par rapport au temps de la mesure de* $\vec{a}$ *sur cet axe.* Effectivement, soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire (variable) sur l'axe portant $\vec{a}$, on a (n° 7), en désignant par $\overline{a}$ la mesure de $\vec{a}$,

$$\vec{a} = \vec{u} . \overline{a},$$

d'où, en dérivant et multipliant par le scalaire $\vec{u}$,

$$\vec{u} \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\overline{a}}{dt} + \left(\vec{u} . \frac{d\vec{u}}{dt} \right) . \overline{a} = \frac{d\overline{a}}{dt},$$

la parenthèse étant nulle puisque $\vec{u}$ est de module constant (n° 90).

Si l'accélération tangentielle est constamment nulle, le mouvement est uniforme sur la trajectoire (n° 210).

L'accélération normale est toujours dirigée dans le sens de la courbure, elle ne peut être constamment nulle que si la trajectoire est une droite (n° 123).

En réunissant ces deux résultats, on en déduit que, si le vecteur accélération est constamment nul, le mouvement est rectiligne et uniforme, ce qu'on peut prévoir *a priori*, le vecteur vitesse étant alors constant.

Les composantes du vecteur accélération sur les axes sont les dérivées secondes x''_{t^2}, y''_{t^2}, z''_{t^2} des coordonnées de M par rapport à t; on se reportera au n° 93 pour ses composantes en coordonnées polaires.

II. — DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN CORPS SOLIDE.

213. **Repères d'un corps solide.** — Nous allons étudier dans ce paragraphe le mouvement d'un corps solide (en nous bornant à la détermination des vitesses de ses points) par rapport à un autre corps solide pris comme repère. Il s'agit, bien entendu, d'un solide théorique, ou « géométrique », formé d'une infinité de points dont les distances mutuelles restent invariables, et auxquels on peut toujours ajouter d'autres points pourvu qu'ils soient invariablement liés aux précédents (un tel corps solide est donc « indéfini » et peut théoriquement occuper tout l'espace).

Pour repérer, à un instant t, la position d'un tel corps (S) par rapport à un autre corps (Σ), on peut se donner la position occupée à cet instant dans (Σ) par :

1° Un point A de (S);

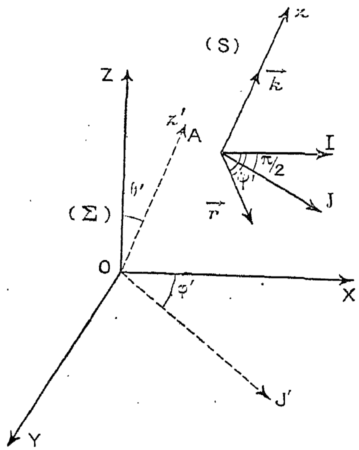
2° Une demi-droite Az, d'origine A, de vecteur unitaire $\vec{k}$;

3° Un demi-plan passant par Az et limité par cette droite prolongée; on peut le caractériser par le vecteur unitaire $\vec{r}$, perpendiculaire à Az, parallèle au demi-plan et de même sens.

Un tel système d'éléments pris dans (S) peut venir coïncider avec un système quelconque d'éléments analogues pris dans (Σ), et la po-

sition des divers points de (S) est alors parfaitement déterminée [1]. Le mouvement de (S) est donc défini par la donnée de $\overrightarrow{OA}$, $\vec{k}$ et $\vec{r}$ en fonction de t (avec la restriction o), le point O étant fixe dans (Σ).

Fig.



Pour caractériser par des scalaires la position de ce système d'éléments par rapport à trois axes de coordonnées OX, OY, OZ rectangulaires fixes dans le système (Σ), on repère :

1° A par ses coordonnées X, Y, Z, projections de $\overrightarrow{OA}$;

2° Az par ses angles polaires (n° 57), soit en appelant OJ$'$ un axe parallèle à la projection de $\vec{k}$ sur le plan OX, OY

$$\varphi' = (\mathrm{OX}, \mathrm{OJ}'), \qquad \theta' = (\mathrm{OZ}, \vec{k}),$$

le plan OZz' étant orienté dans le sens de OZ vers OJ$'$;

3° Le demi-plan par l'angle ψ' que fait $\vec{r}$ dans le plan perpendicu-

---

[1] C'est là un fait géométrique qu'on peut considérer soit comme un postulat, soit comme une conséquence des cas d'égalité des triangles. Les lecteurs désireux d'approfondir ces questions de logique pourront se reporter aux études d'Hilbert sur les Fondements de la Géométrie (par exemple dans les *Annales de l'École Normale*, 1900). Nous nous permettons de leur signaler également un commentaire de ces Principes, publié par l'un d'entre nous (A. Chatelet, *Revue de l'Enseignement des Sciences*, juillet, novembre et décembre 1909).

La condition est manifestement nécessaire. Réciproquement, supposons-la vérifiée; considérons d'abord un point D de (S), en dehors du plan ABC. La vitesse de D est définie par ses projections orthogonales sur les trois droites DA, DB, DC qui forment un véritable trièdre (n° 35 *bis*); mais ces projections sont égales respectivement à celles des vitesses de A, B, C; donc aussi à celles des vitesses de A', B', C'; par suite enfin à celles de la vitesse du point D' de (S') coïncidant avec D à l'instant considéré t; il s'ensuit bien que D et D' ont même vecteur vitesse. Ceci posé considérons un point quelconque M de (S); parmi les quatre droites MA, MB, MC, MD il y en a au moins trois qui ne sont pas dans un même plan; en recommençant pour ces droites le raisonnement précédent, on démontre que M a même vitesse que M' de (S') avec lequel il coïncide à l'instant t (1).

En particulier, si les vitesses de trois points A, B, C, distincts et non en ligne droite, sont nulles, la vitesse de tout point M du corps solide est nulle, le mouvement du système est « tangent au repos »; on dit qu'il y a « *repos instantané* ».

216. Mouvement de translation. — *On dit qu'un corps solide est animé d'un mouvement de translation si, quels que soient les deux points* A *et* B *considérés dans le solide, le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *reste constamment équipollent à la position* $\overrightarrow{A_0B_0}$ *qu'il occupait à un instant* t_0 *arbitrairement choisi.* On peut dire d'une façon abrégée que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constamment équipollent à lui-même.

Pour déterminer le mouvement du solide, il suffit de se donner le mouvement d'un de ses points A, défini par exemple par

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}(t).$$

Le mouvement d'un point M quelconque est alors donné par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a}(t) + \overrightarrow{A_0M_0}.$$

La trajectoire de M se déduit de celle de A par une translation égale au vecteur $\overrightarrow{A_0M_0}$.

(1) C'est un raisonnement analogue qui a été fait pour démontrer la coïncidence de deux champs de moments quand ils coïncident pour trois points (note du n° 18)

A un instant donné les vitesses des divers points du corps solide sont des vecteurs équipollents. Dérivons l'équation qui donne le mouvement de M; comme le second vecteur est constant, on a

$$d(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) \qquad \rightarrow,,,\qquad d(\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

Le vecteur $\overrightarrow{a'}(t)$, qui représente une grandeur vectorielle « libre », puisqu'elle peut être appliquée en tout point du corps solide pour en représenter la vitesse, est appelé la « *vitesse de translation du corps* ».

Remarquons que la vitesse d'un point quelconque M du corps peut être considérée comme le moment par rapport à M d'un système de vecteurs constitué par un couple de moment $\overrightarrow{a'}(t)$.

Dans un mouvement de translation la *vitesse d'un vecteur* lié au corps mobile *est nulle*, puisque les vitesses de son origine et de son extrémité sont équipollentes.

Si la vitesse de translation est constante, les mouvements des divers points sont rectilignes et uniformes; ils décrivent avec une même vitesse des droites parallèles. On dit que la *translation est « rectiligne et uniforme »*.

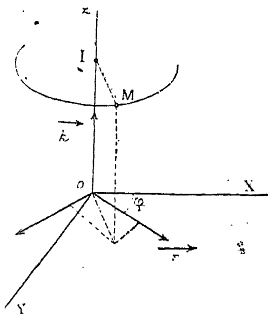
En se plaçant au point de vue des mouvements tangents on voit que, pour tout mouvement de translation, il y a, à chaque instant t_0, un et un seul mouvement de translation rectiligne et uniforme tangent caractérisé par

$$\frac{d(\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{dt} = \overrightarrow{a'_t}(t_0).$$

217. Mouvement de rotation autour d'une droite. — *On dit qu'un corps solide* (S) *est animé d'un mouvement de rotation autour d'une droite* (Δ) du corps de repère (Σ), *si deux points* A *et* B *de* (S) *restent constamment confondus avec deux points* A_0, B_0 *de la droite* (Δ). Tout point de AB reste alors confondu avec le point correspondant de (Δ); tout autre point M de (S) décrit un arc d'une circonférence, dont le centre est sur (Δ) et qui se trouve dans un plan perpendiculaire à Δ.

Choisissons sur (Δ) un point O et une direction Oz, on peut les considérer comme appartenant à (S); pour caractériser la position de (S), à un instant, il suffit donc (n° 213) de se donner la position

Fig. 89.



d'un demi-plan limité à (Δ). Appelons toujours $\vec{k}$ le vecteur unitaire sur Oz, $\vec{r}$ le vecteur unitaire, perpendiculaire à $\vec{k}$, parallèle au demi-plan précédent et de même sens. Le vecteur $\vec{r}$ est parallèle à un plan perpendiculaire à $\vec{k}$; il est déterminé par l'angle φ qu'il fait avec une droite OX de ce plan, fixe dans (Σ); le plan étant orienté par rapport à Oz, φ est défini à un multiple de 2π près. *Le mouvement de* (S) *est défini par la variation de* φ *en fonction de* t

Le mouvement d'un point quelconque M de (S) est défini par

$$\ldots \vec{p}.y + \vec{k}.z \qquad (x, y, z \text{ fixes}; \vec{p} = \vec{k} \wedge \vec{r});$$

$\vec{p}$ est le vecteur déduit de $\vec{r}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{k}$ (n° 93); x, y, z sont les coordonnées fixes de M dans (S) par rapport au système d'axes rectangulaires d'origine O, de vecteurs unitaires $\vec{r}, \vec{p}, \vec{k}$.

La vitesse de M s'obtient en multipliant par la dérivée φ'_t la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à φ; ce qui donne, en remarquant que les déri-

La vitesse d'un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ lié à (S) s'obtient en faisant la différence des vitesses de Q et P; le terme $\left(\vec{k}.\vec{\lambda}'\right)$ commun aux deux vitesses disparaît, il ne reste que le produit extérieur de la rotation par le vecteur (*voir* numéro précédent) :

$$\text{vitesse}\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ}.$$

Si la vitesse angulaire $\left(\text{mesure de } \vec{\omega}\right)$ et la vitesse de glissement sont constantes, il en est encore de même du module de la vitesse de tout point M; le carré de ce module est d'ailleurs

$$= \left(\overrightarrow{MO} \wedge \vec{\omega} + \vec{k}.\lambda'\right)^2 = (\qquad \wedge$$

la parenthèse étant égale au carré de la distance de M à l'axe (Δ). Les trajectoires des points M sont des hélices circulaires (n° 129) décrites d'un mouvement uniforme. On dit que le mouvement de rotation et de glissement est alors un « *mouvement hélicoïdal uniforme* ». Le rapport $2\pi.\lambda' : \varphi'$ est appelé le « *pas du mouvement* ».

Comme pour la translation et la rotation, dans tout mouvement de rotation et de glissement, il y a, à chaque instant, un et un seul mouvement hélicoïdal uniforme tangent, défini par $\varphi' = \qquad \lambda = \lambda'_0$.

219. **Distribution des vitesses dans un mouvement quelconque.** — Considérons un corps solide (S) ayant un certain mouvement par rapport à un solide de repère (Σ) et définissons sa position (selon la seconde méthode donnée au n° 213) par celle d'un de ses points A et par les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de trois axes trirectangles Ax, Ay, Az, issus de A et invariablement liés à (S). Par rapport à ce trièdre, tout point M de (S) a des coordonnées fixes x, y, z; son mouvement est défini par l'égalité

$$\overrightarrow{OA}$$

en dérivant on obtient la vitesse de M

$$dt \qquad \frac{d\left(\overrightarrow{OA}\right)}{dt} \qquad \frac{di}{dt} \qquad \frac{dj}{dt} \qquad z.\frac{dk}{dt}.$$

222. Rotation ou translation tangentes. — Examinons maintenant les cas de dégénérescence et supposons

$$\vec{\omega}.\vec{v}_A = 0,$$

c'est-à-dire la vitesse de A perpendiculaire à la rotation instantanée ; il en est alors de même pour la vitesse de tout autre point B du corps :

1° *Si* $\left(\vec{\omega}\right)^2$ *n'est pas nul*, le système (σ) est équivalent à un vecteur glissant unique $\vec{\omega}$, porté par la droite (Δ), lieu de I défini par

$$\overrightarrow{AI} \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_A;$$

la vitesse d'un point M est donnée par l'équation

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MI} \wedge \vec{\omega} = \qquad (\vec{\ })$$

A l'instant considéré, *il y a une rotation uniforme tangente* définie par le vecteur glissant.

2° *Si* $\left(\vec{\omega}\right)^2 = 0$ *et* $v_A \neq 0$, le système (σ) se réduit à un couple de moment égal à $\vec{v}_A$ pour tout point de l'espace. La vitesse de tout point M est égale à $\vec{v}_A$; à l'instant considéré, il y a une *translation uniforme tangente*. Si $\vec{\omega}$ est constamment nulle, la vitesse d'un vecteur quelconque de S est constamment nulle, le *mouvement est une translation*.

3° Enfin, *si* $\vec{\omega}$ *et* $\vec{v}_A$ *sont nuls*, le système est nul, la vitesse de tout point M est nulle, il y a, à l'instant considéré, *repos instantané*. Si $\vec{\omega}$ et $\vec{v}_A$ sont constamment nuls, il y a repos.

223. Propriétés des vitesses. — Considérons un corps solide mobile (S) et sa vitesse constituée par le système de vecteurs (σ). Les diverses propriétés des systèmes de vecteurs, appliquées à (σ), s'interprètent cinématiquement.

Rappelons d'abord l'interprétation de l'invariance de $\vec{\omega}.\vec{v}_A$: la projection de la vitesse d'un point quelconque de (S) sur l'axe instantané de rotation et de glissement est constante ; il s'ensuit que cet axe est

(Δ) est donc parallèle au plan rectifiant et passe par le point I_0 de la normale principale défini par

$$R.T^2$$

Le point I_0 est du côté de la courbure; c'est le centre de courbure si T est infini (par exemple pour une courbe plane); l'axe est alors un axe instantané de rotation.

III. — COMPOSITION DES MOUVEMENTS.

225. Changement du système de comparaison. — Le problème du changement du système de comparaison (ou de repère) se pose ainsi :

On suppose connu le mouvement d'un solide (C) *par rapport à un solide* (S) *et le mouvement du solide* (S) *par rapport à un solide* (Σ); *on se propose de trouver le mouvement de* (C) *par rapport à* (Σ).

On emploie, pour abréger, les locutions suivantes : le mouvement de (C) par rapport à (S) est dit *relatif;* son mouvement par rapport à (Σ) est dit *absolu* [1]; enfin le mouvement de (S) par rapport à (Σ) est dit d'*entraînement*.

On attribue les mêmes qualificatifs « absolu » et « relatif » aux éléments du mouvement de (C) : la *trajectoire*, la *vitesse*, l'*accélération d'un point* M de (C); la *vitesse d'un vecteur* $\overrightarrow{PQ}$ de (C); la *vitesse du corps* (C) lui-même sont dits *relatif* ou *absolu*, *suivant qu'on les prend dans le mouvement de* (C) *relatif* [par rapport à (S)], ou *absolu* [par rapport à (Σ)]. On les représente souvent par les mêmes lettres affectées des indices r ou a :

$$\vec{v}_r \qquad\qquad (\sigma_r);$$

(1) Le qualificatif « absolu » est, bien entendu, de pure convention et même plutôt regrettable. Le mouvement « absolu » est en réalité le mouvement relatif de (C) par rapport à (Σ). La distinction entre les corps (S) et (Σ) tient en réalité au fait qu'on se donne le *mouvement de* (S) *par rapport à* (Σ) et non de (Σ) par rapport à (S).

Pour définir les mêmes éléments dans le mouvement d'entraînement, on considère le point m ou le vecteur $\overrightarrow{pq}$ de (S) qui, à l'instant t, coïncident avec le point M ou le vecteur $\overrightarrow{PQ}$, et qui, par la suite, sont invariablement liés à (S); on les appelle le *point* ou le *vecteur coïncidant*. La *vitesse* $\vec{v}_e$ ou l'*accélération* $\vec{\gamma}_e$ *du point coïncidant* m sont appelés la *vitesse ou accélération d'entraînement* de M; la *vitesse* $\vec{V}_e$ *du vecteur coïncidant* $\overrightarrow{pq}$ est la *vitesse d'entraînement du vecteur* $\overrightarrow{PQ}$; enfin la vitesse (σ_e) de (S) par rapport à (Σ) est la *vitesse d'entraînement* du solide.

Dans le présent paragraphe on se bornera à chercher les relations entre ces divers éléments à un instant t. Les lois obtenues donnent la « composition des vitesses ou des accélérations ». Nous les établirons en supposant essentiellement, ainsi qu'il a déjà été dit, que la même horloge sert à repérer les temps dans le mouvement par rapport à (S) ou par rapport à (Σ).

226. **Composition des vitesses d'un point et d'un vecteur.** — Nous utiliserons la remarque suivante assez évidente : si l'on considère *à un instant déterminé* t' les positions M′, N′ de deux points M et N, le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est indépendant du corps solide de repère ([1]). En particulier, considérons deux points M et N coïncidant à l'instant t, en P, et leurs positions M′, N′ à un instant voisin t'. La limite du vecteur

$$\frac{\quad}{t'-t} - \frac{\overrightarrow{PN'}}{t'-t} - \frac{\quad}{t'-t},$$

qui est la vitesse à l'instant t du vecteur $\overrightarrow{MN}$, est indépendante du système de repère. On peut énoncer cette propriété :

Si deux points M *et* N *coïncident à l'instant* t, *la différence géométrique de leurs vitesses est un vecteur indépendant du système de repère.*

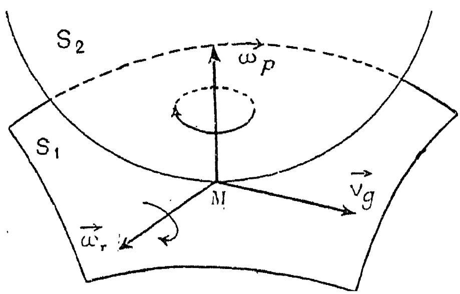
([1]) Il n'en est plus de même, bien entendu, si l'on considère des positions à des instants différents, ou encore si l'horloge n'est pas la même pour tous les systèmes de repères.

rence est indépendante de (Σ). En prenant pour (Σ), (S_1) lui-même, on voit que c'est notamment la vitesse de m_2 par rapport à (S_1); c'est de même l'opposée de la vitesse de m_1 par rapport à (S_2). *Cette vitesse est appelée la vitesse de glissement* $\overrightarrow{v_g}$ *des deux solides* ou des deux surfaces au point M.

Cette vitesse de glissement est dans le plan tangent commun aux deux surfaces; effectivement considérons le point de contact M mobile par rapport aux deux surfaces. Sa vitesse par rapport à (S_1), considérée comme absolue, est égale à la somme de sa vitesse par rapport à (S_2), considérée comme relative, et de sa vitesse d'entraînement qui est la vitesse de m_2 par rapport à (S_1), donc la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g}$. Mais les vitesses absolue et relative sont dans le plan tangent commun aux deux surfaces puisque les trajectoires absolue et relative sont des courbes tracées respectivement sur (S_1) et (S_2); il en est par suite de même de leur différence qui est la vitesse de glissement. Cette propriété et sa démonstration subsistent si l'une des surfaces devient une courbe ou un point; ou encore si les deux surfaces deviennent des courbes; le plan tangent commun est, dans ce dernier cas, remplacé par le plan des deux tangentes, ou simplement par la tangente commune si les courbes sont tangentes.

La résultante générale de (σ) est un vecteur, rotation instantanée; on le décompose en général en un *vecteur* $\overrightarrow{\omega_p}$ *porté par la normale*

Fig. 92.



commune qu'on appelle le « *pivotement des deux surfaces* » et *un vecteur* $\overrightarrow{\omega_r}$ *situé dans le plan tangent commun* qu'on appelle le « *roulement des deux surfaces* ».

Si la vitesse de glissement est nulle, il y a rotation instantanée autour d'un axe passant par le point de contact; on dit qu'à l'instant considéré les deux surfaces *roulent et pivotent sans glisser* (la propriété est évidemment réciproque).

S'il y a constamment absence de glissement, le point de contact M *décrit sur* (S_1) *et sur* (S_2) *des courbes* C_1 *et* C_2 *tangentes à chaque instant et les arcs décrits dans le même laps de temps sont égaux.* Effectivement orientons les courbes C_1 et C_2 dans le sens du mouvement de M; soient m_1 et m_2 les positions de M à un instant initial, et m'_1, m'_2 ses positions à un instant t; posons

les vitesses de M sur les deux courbes étant égales (puisque la vitesse de glissement est nulle), ces courbes sont tangentes et les sens positifs des arcs sont prolongés par la même direction; enfin sur cette direction on a

d'où, en intégrant depuis l'instant initial,

$$s_1 = s_2.$$

Cette propriété s'étend naturellement aux cas de dégénérescence déjà indiqués : si (S_2) devient une courbe, elle est confondue avec C_2; si (S_1) et (S_2) sont des courbes C_1, C_2, elles sont constamment tangentes; il n'y a plus à proprement parler de rotation de pivotement, la rotation instantanée peut toujours être considérée comme située dans un plan tangent commun aux deux courbes. *Si l'une des surfaces*, (S_2) par exemple, *se réduit à un point, ce point est fixe sur l'autre surface*, sa vitesse par rapport à cette surface est en effet constamment nulle; c'est encore dire que la courbe C_2 étant un point, l'arc décrit sur C_1 ne saurait être que nul.

IV. — MOUVEMENT CONTINU D'UN CORPS SOLIDE.

231. **Surfaces base et roulette.** — Considérons le mouvement continu d'un solide (S_2) par rapport à un solide (S_1); si ce n'est pas un mouvement de translation, il n'y a qu'exceptionnellement une trans-

même temps que les vecteurs $\vec{a}_2(u)$ et $\vec{a}_1(u)$; et s'il en est ainsi, d'après la réciproque établie au numéro précédent, il y aura bien à ce moment rotation et glissement instantanés de s_2 par rapport à s_1, autour de la génératrice commune.

Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance établie entre les points de s_2 et de s_1 définisse une viration est que les deux systèmes de trois vecteurs*

$$\left[\vec{V}_2 = (\vec{b}'_2 \wedge \qquad \rightarrow \quad (\rightarrow \quad \rightarrow\right.$$

$$\left[\vec{V}_1 = (\vec{b}'_1 \wedge \quad).\frac{du_1}{dt}, \qquad \vec{W}_1 = (\vec{a}'_1 \wedge \vec{a}_1).\frac{du_1}{dt}\right.$$

constituent des figures égales entre elles (c'est-à-dire qu'on peut faire coïncider) *en chacun des couples de points correspondants i_1 et i_2.*

Il est à remarquer que si cette condition est vérifiée pour une certaine variable t, elle le reste pour toute variable θ, fonction de t. La condition de viration est donc uniquement une condition de correspondance des deux surfaces, ce qui était d'ailleurs à peu près évident *a priori*. Par conséquent, on peut l'exprimer au moyen de différentielles : *il faut et il suffit qu'il y ait égalité entre les systèmes de trois vecteurs*

$$(\vec{db}_1 \wedge \vec{a}_1, \; \vec{da}_1 \wedge \vec{a}_1, \; \vec{a}_1); \quad (\vec{db}_2 \wedge \vec{a}_2, \; \vec{da}_2 \wedge \qquad \vec{a}_2).$$

Nous désignerons encore ces vecteurs, proportionnels aux précédents, par les notations $(\vec{V}_1, \vec{W}_1, \vec{a}_1)$, $(\vec{V}_2, \vec{W}_2, \vec{a}_2)$. Nous allons examiner cette condition en la rapprochant des divers résultats déjà obtenus pour les surfaces réglées.

234. Viration des surfaces non développables. — Considérons des surfaces non développables s_2 et s_1 susceptibles de virer l'une sur l'autre. Lorsque dans ce mouvement une génératrice $i_2 z_2$ vient coïncider avec $i_1 z_1$, il en est de même des plans tangents en chacun de leurs points, puisqu'il y a alors raccordement (n° 232). Les plans tangents à l'infini coïncidant, les points centraux [où le plan tangent

et roulette s_1 et s_2 sont encore les lieux des positions de l'axe instantané de rotation dans les deux solides (S_1) et (S_2). Le raisonnement du n° 232 est toujours valable : les deux surfaces sont, à chaque instant du mouvement, circonscrites suivant l'axe instantané; dans leur mouvement mutuel, en tout point de l'axe la vitesse de glissement est nulle; il y a seulement une rotation de roulement portée par l'axe. On dit que le mouvement est un « *roulement continu sans glissement* ».

Comme pour le roulement avec glissement, ce mouvement continu définit une correspondance entre les points des surfaces s_1 et s_2. Considérons des courbes correspondantes C_1 et C_2 : on peut les envisager comme les lieux dans (S_1) et (S_2) d'un certain point m où les deux surfaces s_1 et s_2 sont en contact à l'instant t. En appliquant à ce point les résultats du n° 230, on voit que la courbe C_2 est tangente à l'instant t en m à la courbe correspondante C_1 et les arcs correspondants de C_2 et C_1 sont égaux.

Il résulte de là que la correspondance établie dans ce cas entre les surfaces s_1 et s_2 conserve les longueurs; *les deux surfaces sont applicables* (n° 155). Démontrons-le encore par un raisonnement direct : Soit sur s_1 une courbe quelconque C_1, lieu d'un point m_1, et sur s_2 la courbe C_2, lieu du point correspondant m_2. Les vecteurs $d(\overrightarrow{Am_1})$ et $d(\overrightarrow{Bm_2})$ doivent pouvoir venir en coïncidence, ils ont par suite même module ou même carré, de sorte que

La correspondance conserve le ds^2 des surfaces.

237. **Roulement des surfaces réglées.** — Considérons toujours deux surfaces réglées s_1 et s_2 définies dans des solides (S_1) et (S_2)

$\overrightarrow{A}$

et cherchons la condition pour que la correspondance établie entre leurs points, en prenant u_1 et u_2 fonctions simultanées de t, définisse un mouvement continu de roulement de s_2 sur s_1.

Il faut et il suffit que les vecteurs

$$d(\overrightarrow{\mathrm{A}m_1}) :$$

définis en divers points correspondants de génératrices correspondantes, viennent en coïncidence en même temps que ces génératrices elles-mêmes; donc qu'il en soit ainsi des systèmes de trois vecteurs

$$\overrightarrow{da_1}, \qquad \rightarrow$$

La condition nécessaire et suffisante de roulement est que ces systèmes de trois vecteurs constituent des figures respectivement égales (géométriquement) *en tous les points des deux courbes correspondantes, lieux des points i_1 et i_2.*

Dans le cas de *surfaces réglées non développables*, on peut toujours prendre pour i_1 et i_2 des points des lignes de striction; la dition db_1 $\overrightarrow{db_2}$ montre que ces points doivent décrire des arcs égaux sur ces lignes. Dans le mouvement effectif, les lignes de striction roulent l'une sur l'autre sans glisser, en restant en contact.

Dans le cas de *deux surfaces développables*, les conditions se simplifient : on peut prendre i_1 et i_2 sur les arêtes de rebroussement, alors $\overrightarrow{db_1}$ est parallèle à $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{da_1}$ est perpendiculaire à leur direction commune. L'égalité des figures se réduit donc à l'égalité des modules

$$|\overrightarrow{db_1}| = |\overrightarrow{db_2}|; \qquad |\overrightarrow{da_1}| = |\overrightarrow{da_2}|$$

Ces conditions sont équivalentes, avec les notations du n° 235, à

$$|ds_1| = |ds_2|; \qquad \frac{|ds_1|}{\mathrm{D}} = \frac{|ds_2|}{\mathrm{D}}.$$

Pour que deux surfaces développables puissent rouler sans glisser, il faut que, sur les arêtes de rebroussement, le rayon de courbure soit la même fonction de l'arc s. Dans le mouvement, les arêtes de rebroussement roulent sans glisser l'une sur l'autre, elles sont tangentes et ont même plan osculateur : la coïncidence des systèmes de trois vecteurs montre qu'elles ont aussi même centre de courbure; ces conditions définissent complètement le mouvement.

Expression invariante. — Les formules de transformation permettent de vérifier immédiatement l'identité suivante : dans un changement de coordonnées

Réciproquement, supposons qu'on passe de x, y, z à x', y', z' et de X, Y, Z à X′, Y′, Z′ par des substitutions linéaires S et s, de façon à vérifier cette égalité. Les relations qu'on en déduit entre les coefficients de S et s montrent que S est identique à la substitution contravariante de s. Donc :

La condition nécessaire et suffisante, pour que deux substitutions S *et s effectuées sur x, y, z et* X, Y, Z *soient contravariantes, est qu'elles laissent invariante l'expression*

En particulier, *la condition nécessaire et suffisante, pour qu'une substitution soit orthogonale est qu'effectuée à la fois sur x, y, z et* X, Y, Z *elle laisse invariante l'expression précédente.*

5*. Formules d'angles et distances en coordonnées obliques. — Les formules d'angles et distances en coordonnées obliques prennent une forme simple lorsqu'on emploie simultanément des coordonnées contravariantes. Elles résultent des expressions des produits intérieur, extérieur et mixte, que nous nous contenterons d'examiner ici. On en déduirait les expressions par rapport à un seul système de coordonnées en utilisant les formules de transformation indiquées au numéro précédent.

Soient donc deux trièdres supplémentaires T et T* et des vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots$ dont les composantes par rapport à ces trièdres sont respectivement définies par les égalités

$$\vec{I} + Y_1.\vec{J} + Z_1.\vec{K},$$

$$_2 = x_2.\vec{i} + y_2.\vec{j} + z_2.\vec{k} = X_2.\vec{I} + Y_2.\vec{J} \cdot Z_2.\vec{K},$$

Produit intérieur. — Formons le produit d'un second membre par un troisième; on obtient immédiatement, en tenant compte des relations (1) entre les $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$,

Le produit intérieur de deux vecteurs est égal à la somme des produits des composantes de même nom de ces vecteurs par rapport aux deux trièdres supplémentaires.

composantes par rapport à T *par le déterminant de ce trièdre :*

$$(4) \qquad = \Delta . \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

6*. **Coordonnées curvilignes.** — Supposons qu'à chaque point M de l'espace (ou d'une région de l'espace) on fasse correspondre un système de trois nombres u, v, w et qu'inversement, à tout système de trois nombres u, v, w, corresponde ainsi un point M de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$, joignant un point O fixe au point variable M, définit une fonction vectorielle de u, v, w :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u, v, w).$$

On peut encore considérer que la correspondance entre le point M et les nombres u, v, w définit une correspondance entre le point M et le point m qui, par rapport à un certain trièdre trirectangle, a pour coordonnées cartésiennes u, v, w. *Les nombres u, v, w sont appelés les coordonnées curvilignes de* M *et le point m est l'image de* M. Cette définition des coordonnées curvilignes de l'espace est l'extension naturelle de la définition des coordonnées curvilignes sur une surface, donnée au n° 136.

Si l'on donne à une des coordonnées, par exemple w, une valeur constante w_0, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ n'est plus fonction que des deux paramètres u, v; son hodographe est une surface S_{w_0} (n° 135); les diverses surfaces S_w sont appelées les *surfaces coordonnées des u, v*. On définit de même les surfaces coordonnées des v, w et des w, u.

Si l'on donne à deux des coordonnées des valeurs constantes, par exemple $v = v_0$, $w = w_0$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ n'est plus fonction que de la seule variable u, son hodographe est une courbe (n° 81) qu'on appelle *courbe ou ligne coordonnée des u*, C_{v_0,w_0}; on définit de même les courbes coordonnées des v et des w. Les courbes coordonnées sont les intersections des surfaces coordonnées; ainsi la courbe C_{v_0,w_0} est l'intersection des deux surfaces S_{v_0} et S_{w_0}.

Trièdre tangent. — Considérons un point A correspondant au système de coordonnées (u_0, v_0, w_0) et les trois vecteurs dérivés partiels de $\overrightarrow{OM}$ en A [1] :

$$\vec{u} = \left[\frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial u}\right]_0, \qquad \vec{v} = \left[\frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial v}\right]_0,$$

[1] Comme on l'a signalé au n° 143, la définition des dérivées partielles d'un vecteur fonction de trois variables est l'extension immédiate de la définition dans le cas de deux variables.

module commun 1, on fait correspondre à chaque point M les coordonnées polaires (n° 50) $u = \rho$, $v = \theta$ de sa projection m sur le plan Ox, Oy et sa cote $w = z$. On définit ainsi un système de coordonnées curvilignes caractérisé par l'équation

$$\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{r} + z.\vec{k}, \qquad (\vec{i}, \vec{r}) = \theta;$$

$\vec{r}$, suivant une notation déjà employée (n^{os} 93 et 148), désigne un vecteur unitaire perpendiculaire à Oz et formant l'angle θ avec Ox.

Les surfaces coordonnées sont : des plans perpendiculaires à Oz (surfaces $z = z_0$); des demi-plans passant par Oz et limités à cette droite (surfaces $\theta = \theta_0$); des cylindres de révolution autour de Oz (surfaces $\rho = \rho_0$). Les lignes coordonnées sont : des parallèles à Oz; des demi-droites dont l'origine est sur Oz et qui lui sont perpendiculaires; des circonférences d'axe Oz.

Le trièdre tangent en un point est constitué par les vecteurs

$$u = r, \qquad = \rho.(\vec{k} \wedge \vec{r}) = \rho.\vec{p},$$

et son déterminant est

$$\delta = \qquad \wedge \vec{k}) =$$

. Ce trièdre est trirectangle mais ses vecteurs unitaires ne sont pas de même module; le trièdre supplémentaire est formé des vecteurs

$$\vec{U} = \vec{r} = \qquad \vec{V} = \frac{1}{\rho}.\vec{p} = \frac{1}{\rho^2}.\vec{v}, \qquad \vec{W} = \vec{k} = \vec{w}.$$

Le déterminant δ est nul en même temps que ρ tous les points de Oz sont des pôles; ils correspondent d'ailleurs à $= 0$, z déterminé et θ arbitraire.

3° *Coordonnées sphériques.* — En considérant toujours l'espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires, faisons correspondre au point M : les angles polaires (n° 57) $u = \varphi$, $v = \theta$ d'un axe choisi sur la droite OM et la mesure du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur cet axe $w = \rho$. On définit ainsi un système de coordonnées curvilignes qu'on peut caractériser par l'égalité

$$\overrightarrow{OM} = \rho.(\vec{r}.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta) = \rho.\vec{R}; \qquad (\vec{i}, \vec{r}) = \varphi.$$

Les surfaces coordonnées sont : des cônes d'axe Oz (surfaces $\theta = \theta_0$); des demi-plans passant par Oz et limités à cette droite (surfaces $\varphi = \varphi_0$); des sphères de centre O (surfaces $\rho = \rho_0$). Les courbes coordonnées sont : des demi-droites issues de O; les méridiens et les parallèles des sphères de centre O, sur lesquelles on prend Oz pour ligne des pôles. Le trièdre tangent est formé

Dans un champ de vecteurs, $\vec{a}$ fonction de $\overrightarrow{OM}$, on appelle *lignes de champ* ou *lignes de force* des courbes qui, en chaque point, sont tangentes au vecteur du champ, correspondant à ce point. On obtient immédiatement l'équation « différentielle » des lignes de champ en exprimant que la différentielle de $\overrightarrow{OM}$ est parallèle au vecteur du champ

$$d(\overrightarrow{OM}) \wedge \vec{a} = 0;$$

cette égalité est équivalente à deux équations scalaires immédiates.

Étant donné un système de coordonnées, considérons le champ constitué par l'un des vecteurs $\vec{u}$ du trièdre tangent : les lignes de champ sont les lignes coordonnées

$$v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.}$$

9*. **Intégrale de volume.** — Étant donné un champ de scalaires λ ou de vecteurs $\vec{a}$, on appelle *intégrale de volume de* λ *ou de* $\vec{a}$, *étendue à un domaine* (V) (intérieur au domaine de définition du champ) un nombre I_V ou un vecteur $\vec{A}_V$ caractérisé par des propriétés généralisant celles du n° 142 :

a. Si (V) est formé par la juxtaposition de deux domaines (V′) et (V″), sans partie commune, on a

$$I_V = I_{V'} + I_{V''} \qquad \vec{A}_V = \vec{A}_{V'} + \vec{A}_{V''};$$

b. Si l'on considère un petit domaine (V) de volume Ω entourant un point M, le quotient de l'intégrale par le volume

$$I_V : \Omega \qquad \text{ou} \qquad \vec{A}_V : \Omega$$

a pour limite la valeur de λ ou de $\vec{a}$ au point M, lorsque (V) devenant de plus en plus petit, tous ses points tendent vers M.

On peut établir que le calcul de I_V ou de $\vec{A}_V$ se ramène au calcul successif de trois intégrales simples qu'on représente par les symboles

$$I_V = \int\int\int_V \lambda . dx . dy . dz, \qquad \vec{A}_V = \int\int\int_V \vec{a} . dx . dy . dz;$$

ils généralisent ceux dont on a donné la signification au n° 142; dans chacune des intégrales simples x, y, z doivent croître, en passant de leur limite inférieure à leur limite supérieure.

Supposons l'espace rapporté à un système de coordonnées curvilignes u, v, w et à chaque point M de coordonnées curvilignes u, v, w faisons correspondre son image m ayant u, v, w pour coordonnées cartésiennes par rapport à un certain trièdre trirectangle T. On peut ramener le calcul de l'intégrale de

scalaires λ, *ou du champ de vecteurs* $\vec{a}$, le scalaire I_{Σ} ou le vecteur $\overrightarrow{A_{\Sigma}}$ défini par des propriétés analogues à celles qui caractérisent l'intégrale de volume (numéro précédent) :

a. Si la portion (Σ) est formée par la juxtaposition de deux portions (Σ') et (Σ''), sans partie commune, on a

$$I_{\Sigma} = I_{\Sigma'} \cdot \qquad \text{ou}$$

b. Si l'on considère une petite portion (Σ) de S, d'aire s, entourant un point M, le quotient de l'intégrale par l'aire

$$\rightarrow$$

a pour limite λ ou $\vec{a}$, lorsque (Σ) devient de plus en plus petit, tous ses points tendant vers M.

Supposons la surface S définie par des coordonnées curvilignes u, v (n° 136) et, à chaque point M faisons correspondre son image m de coordonnées u, v dans un plan P. Soit (σ) le domaine décrit par m lorsque M décrit (Σ); en raisonnant comme pour l'intégrale de volume, on voit qu'on peut ramener le calcul de l'intégrale de surface à celui d'une intégrale double dans le plan P de l'image, étendue au domaine (σ).

Il reste à chercher la limite du rapport des aires décrites par M sur S et par son image m dans P. Faisons décrire à m un carré de côtés parallèles aux axes, définis par les inégalités

A des infiniment petits du second ordre près par rapport à ε, la projection de M sur le plan tangent à S au point A (de coordonnées u_0, v_0) balaie un parallélogramme de centre A de côtés équipollents à

$$(\overrightarrow{OM})$$

La limite cherchée est par suite égale au module du produit extérieur

C'est le scalaire qu'on a désigné par II dans la théorie des surfaces (n°
Avec cette notation l'intégrale de surface, scalaire ou vectorielle, est égale à l'intégrale double, à évaluer dans le plan P,

$$\int\int_{\sigma} \lambda . \mathrm{II} . du . \iota \qquad\qquad \int\int_{\sigma} \vec{a} . \mathrm{II} . du . dv,$$

Les composantes du rotationnel suivant le trièdre tangent sont encore les mineurs symboliques du tableau

$$\frac{1}{\delta} \times \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ \vec{a}.\vec{u} & \vec{a}.\vec{v} & \vec{a}.\vec{w} \end{matrix} \right\|$$

les termes de la seconde ligne sont les projections orthogonales du vecteur sur le trièdre tangent, ou encore les composantes suivant le trièdre supplémentaire.

Reprenons la deuxième expression de $\vec{U}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a}$ et remplaçons $\vec{U}$ par son expression en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{w}$; on obtient

$$\left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right).\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a} = \vec{w}.\frac{\partial \vec{a}}{\partial v} - \vec{v}.\frac{\partial \vec{a}}{\partial w}.$$

Cette propriété est indépendante du système de coordonnées, on peut donc considérer $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme des vecteurs quelconques; les dérivées partielles $\frac{\partial \vec{a}}{\partial v}$, $\frac{\partial \vec{a}}{\partial w}$ sont les dérivées de $\vec{a}$ suivant ces vecteurs. En remplaçant $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par des vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ arbitraires, on en déduit l'égalité

$$\vec{a}'_{\vec{p}}.\vec{q} - \vec{a}'_{\vec{q}}.\vec{p} = \left(\vec{p} \wedge \vec{q}\right).\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a}.$$

Cette identité en $\vec{p}$ et $\vec{q}$ pourrait servir de définition au rotationnel; elle comprend comme cas particulier l'expression des composantes indiquées dans le cas de coordonnées rectangulaires.

16*. Calcul des invariants différentiels. — La définition du gradient, de la divergence et du rotationnel montre immédiatement qu'ils sont distributifs par rapport à l'addition

$$\mu) = \text{D}.\lambda \quad \cdot \vec{\text{D}}.\mu, \qquad \overrightarrow{\text{grad}}.(\lambda + \mu) = \overrightarrow{\text{grad}}.\lambda + \overrightarrow{\text{grad}}.\mu,$$

$$\vec{b}) = \vec{\text{D}}.\vec{a} \qquad .\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \qquad + \text{div}.\vec{b},$$

$$\text{rot}.(a \cdot \quad = \text{rot}.a + \text{rot}.l$$

Les formules de dérivation des produits sont plus complexes; nous avons à examiner les quatre produits de scalaires et vecteurs

$$\lambda.\vec{a}; \qquad \vec{a}.\vec{b}; \qquad \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

surface

$$\int\int\int_V \mathrm{div}.\vec{a}.dx.dy.dz = \int\int_S (\vec{n_e}.\vec{a}).d\sigma.$$

Dans l'intégrale de surface, $d\sigma$ désigne l'élément de surface (n° 10*) et $\vec{n_e}$ un vecteur unitaire sur la normale, dirigé vers l'extérieur du volume V. Cette intégrale est quelquefois appelée, en raison d'une interprétation hydrodynamique possible, le *flux du vecteur* $\vec{a}$ *à travers la surface* S; avec cette locution, l'égalité s'énonce ainsi :

Le flux d'un vecteur à travers une surface fermée S *est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur, étendue au volume intérieur à la surface.*

Démonstration. — Considérons le système de coordonnées curvilignes u, v, w défini comme suit : la surface limite S correspond à une certaine valeur positive u_0 de u; pour des valeurs décroissantes de u les surfaces coordonnées sont respectivement intérieures l'une à l'autre et balaient ainsi tout le volume V jusqu'à tendre vers un ou plusieurs points ou vers une ligne pour $u = 0$. Sur chacune de ces surfaces S_u, on définit un système de coordonnées v et w, de façon que les courbes coordonnées $v = \text{const.}$ et $w = \text{const.}$ soient fermées. On suppose qu'on peut réaliser ceci de façon que $\overrightarrow{OM}$ soit une fonction continue et dérivable de u, v, w et que le déterminant δ du trièdre tangent soit positif à l'intérieur de V et s'annule seulement pour des points exceptionnels. Parmi ceux-là il y aura notamment les points ou la courbe correspondant à $u = 0$; pour ces points, en effet, l'une au moins des coordonnée v ou w reste arbitraire et la dérivée partielle correspondante de $\overrightarrow{OM}$ est nulle.

Ceci posé, exprimons l'intégrale de volume dans ce système de coordonnées et remplaçons $|\delta|\,\mathrm{div}.\vec{a} = \delta.\mathrm{div}.\vec{a}$ par son expression sous forme d'une somme de trois dérivées, donnée au n° 14* :

$$\int\int_V \left[\frac{\partial(\delta.a_u)}{\partial u} + \frac{\partial(\delta.a_v)}{\partial v} + \frac{\partial(\delta.a_w)}{\partial}\right] du\, dv\, dw.$$

Dans la dernière intégrale les limites sont déterminées par la définition du système de coordonnées. Décomposons-la en la somme des trois intégrales qui s'écrivent, en adoptant un ordre convenable des intégrations par rapport à u, v, w :

$$\int\int dv.dw\left[\int\frac{\partial(\delta.a_u)}{\partial u}du\right]; \qquad \int\int dw.du\left[\int\frac{\partial(\delta.a_v)}{\partial v}dv\right],$$

$$\int\int du.dv\left[\int\frac{\partial(\delta.a_w)}{\partial w}dw\right].$$

mier membre est, d'après la notation du n° 18*, *le flux du rotationnel de* $\vec{a}$, *à travers la surface* Σ. On peut remarquer que le rotationnel de $\vec{a}$ constituant un champ de vecteurs sans divergence (deuxième propriété du n° 17*), son flux à travers une surface ouverte Σ ne dépend effectivement que du contour C qui la limite (application de la formule de Green, du n° 18*).

Démonstration. — Considérons le système de coordonnées curvilignes u, v, w défini comme suit : w constant sur la surface S; u, v coordonnées sur S de telle sorte que la courbe C corresponde à une valeur constante u_0 de u. Pour les valeurs décroissantes de u les courbes coordonnées correspondantes sont fermées, intérieures l'une à l'autre et tendent vers un ou plusieurs points pour $u = 0$. Sur chacune de ces courbes fermées, v est l'arc orienté par continuité d'après le sens sur C. On suppose qu'on peut réaliser ceci de telle sorte que $\overrightarrow{OM}$ soit une fonction continue et dérivable de u, v sur la surface et que le déterminant δ du trièdre tangent soit positif sur la surface et s'annule seulement pour des points exceptionnels. Parmi ceux-ci, il y aura notamment les points correspondant à $u = 0$: pour ces points, v reste arbitraire et la dérivée partielle de $\overrightarrow{OM}$ est nulle. Comme δ est positif, le trièdre tangent est direct; en un point de C, par exemple, $\vec{v}$ est confondu avec $\vec{p}$; $\vec{u}$ est dans le plan tangent du côté extérieur à la portion de surface Σ; $\vec{w}$ a donc un sens positif par rapport au sens de circulation sur C, on peut le supposer normal à S et unitaire; il est donc confondu avec $\vec{n}$. Dans ces conditions la valeur du déterminant est

$$\delta = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|.$$

Ceci posé, écrivons l'intégrale de surface dans le système de coordonnées curvilignes choisi; l'élément d'aire $d\sigma$ a pour valeur

$$d\sigma = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|.du.dv = \delta.du.dv;$$

remplaçons aussi $\delta.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a}$ par son expression donnée au n° 15* : l'intégrale de surface devient

$$\int\int \left[\frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{v}\right)}{\partial u} - \frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{u}\right)}{\partial v}\right] du\, dv$$

$$, \int \frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{v}\right)}{\partial u} du - \int du \int \frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{u}\right)}{\partial v}$$

La seconde intégrale est nulle, puisque l'intégrale simple à effectuer pa rapport à v est égale à la variation de $\left(\vec{a}.\vec{u}\right)$ sur un contour fermé; l

première intégrale est égale à la variation de $\vec{a}.\vec{v}$, de $u = 0$ à $u = u_0$; pour $u = 0$, δ est nul; pour u_0 on obtient la valeur du produit scalaire sur la courbe C, c'est-à-dire $\vec{a}.\vec{p}$; comme dv est lui-même égal à ds sur C, l'intégrale double est bien égale à l'intégrale curviligne constituant le second membre de la formule.

Nous nous contenterons d'examiner l'application immédiate de cette formule aux champs de vecteurs sans rotationnel :

Si dans un champ de vecteurs le rotationnel est nul (1), *le travail du vecteur sur tout contour fermé* C *est nul. Par suite le travail de ce vecteur sur un arc de courbe* AB *ne dépend que des positions des extrémités* A *et* B *et non de la forme de l'arc de courbe.*

(1) Ceci a lieu notamment pour un champ de gradients (n° 17*).

5**. **Accélération d'un point.** — Dérivons la vitesse $\vec{v}$ d'un point M de P_2

$$= \omega \wedge$$

appliquons à $\overrightarrow{IM}$ la règle qui donne la vitesse absolue d'un vecteur (n°
l'expression de la vitesse d'entraînement de $\overrightarrow{IM}$ est, d'après le n° 219, $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$; la vitesse relative de $\overrightarrow{IM}$ est l'opposée de la vitesse relative de I (que nous avons appelée $\vec{w}$), puisque la vitesse relative de M est nulle. Donc

$$\vec{\gamma} = \overrightarrow{\omega'_t} \wedge \qquad \wedge (\vec{\omega} \wedge$$

Développons le double produit extérieur (n° 35); remplaçons aussi $\vec{\omega}$ par $\vec{k}.\omega$ et $\vec{\omega} \wedge \vec{w}$ par $\omega^2.\vec{IJ}$, nous obtenons l'expression de l'accélération du point

$$\vec{} \qquad k \wedge \qquad \wedge \qquad \overrightarrow{}$$

6**. **Accélération d'entraînement du centre instantané.** — Faisons une première application de cette formule en supposant que le point M coïncide avec I à l'instant t; nous obtenons l'accélération d'entraînement du point I, que nous appellerons $\vec{\Gamma}$. Dans la formule (2), le premier terme est nul. Donc

On en déduit notamment un résultat laissé en suspens au n° 2** :

Si le point M *coïncide, à l'instant t, avec le centre instantané* I, *sa trajectoire* [*qui admet* I *pour point singulier* (1)] *est tangente en* I *à la normale commune* IJ *aux courbes base et roulette.*

7**. **Centre des accélérations.** — *Il existe, à l'instant t, un et un seul point* A *dont l'accélération d'entraînement est nulle*, c'est-à-dire tel que

$$(3) \qquad 0 = \omega'_t.(\vec{k} \wedge \overrightarrow{IA}) - \omega^2.\overrightarrow{JA}$$

ou encore

(1) Ce point singulier est, en général, un point de rebroussement (n 106); en effet en I la dérivée première (vitesse) est nulle, la dérivée seconde (accélération) ne l'étant pas. [Comme exemples, voir la cycloïde (n° 119) et les épi- ou hypocycloïdes

Cette formule fournit la construction du point A. D'une part, $\overrightarrow{AJ}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AI}$, directement ou inversement suivant que ω'_t est positif ou négatif; A se trouve donc sur une demi-circonférence décrite sur IJ comme diamètre (dans le cas de la figure 1**, c'est la demi-circonférence de gauche pour ω'_t positif, celle de droite pour ω'_t négatif). D'autre part, en prenant le module des deux membres, on obtient

$$|JA| : |IA| = |\omega'_t : \omega^2|,$$

le point A se trouve donc sur la circonférence, lieu des points dont le rapport des distances à I et J est égal au quotient $|\omega'_t : \omega^2|$; cette circonférence rencontre la demi-circonférence précédente en un et un seul point (distinct de I); ce point est confondu avec J si $\omega'_t = 0$.

Le point A ainsi déterminé s'appelle le *centre des accélérations*. Si l'on fait varier d'une part ω'_t, d'autre part ω et $\vec{w}$, en laissant constant le vecteur longueur

le point J reste fixe et le centre A des accélérations parcourt la circonférence décrite sur IJ comme diamètre.

8**. **Distribution des accélérations.** — L'introduction du point A permet de simplifier l'expression de l'accélération $\vec{\gamma}$ d'un point M. Retranchons membre à membre l'égalité (3), qui définit A, de l'égalité (2), qui donne $\vec{\gamma}$, nous obtenons

$$\vec{\gamma} = \omega'_t.(\vec{k} \wedge \overrightarrow{IM}) - \omega'_t.(\vec{k} \wedge \overrightarrow{IA}) - \omega^2.\overrightarrow{JM} \quad \omega^2.\overrightarrow{JA}$$

ou, après des mises en facteur évidentes [1],

$$\vec{\gamma} = \omega'_t.(\vec{k} \wedge \overrightarrow{AM}) - \omega^2.\overrightarrow{AM}.$$

[1] Appliquons cette formule à la détermination du centre des accélérations lorsque le mouvement de P_2 est défini (comme à la fin du n° 4**) par la donnée de $\overrightarrow{O_1O}$ et de $\theta = (O_1x_1, Ox)$; on en déduit d'abord par deux dérivations

$$^2(\overrightarrow{O_1O}) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Joignons à l'équatio

Il s'ensuit que la figure formée par $\vec{v}$ d'origine M et $\overrightarrow{IM}$ reste directement semblable à elle-même, quel que soit le point M ; en particulier elle est semblable à la figure formée par le vecteur $\vec{w}$ d'origine J et $\overrightarrow{IJ}$, puisque la vitesse de J est précisément $\vec{w}$.

Quant à l'accélération $\vec{\gamma}$ de M, menée avec M comme origine, d'après son expression

$$\vec{\gamma} = \omega'_t.\left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{AM}\right) - \omega^2.\overrightarrow{AM},$$

elle constitue avec $\overrightarrow{AM}$ une figure qui reste directement semblable à elle-même, quel que soit le point M. Elle est en particulier semblable à la figure constituée par $\vec{\Gamma}$ d'origine I et $\overrightarrow{AI}$.

Ces constructions sont réalisées sur la figure 1** où l'on a indiqué les triangles semblables.

Si l'on veut que les vecteurs représentatifs vérifient les mêmes relations que les grandeurs représentées, il faut que les longueurs représentant les unités vérifient la relation

On ne peut plus alors choisir arbitrairement les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{\Gamma}$, $\overrightarrow{IJ}$ étant donné. Ils doivent vérifier la relation

puisque la valeur commune de ces rapports est $|\omega|$.

10. Mouvement géométrique.** — Considérons le cas particulier d'une vitesse angulaire constante : ω'_t est nul et le point A est en J. On peut représenter les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{\Gamma}$ par $\overrightarrow{IT}$ et $\overrightarrow{IJ}$ (ce qui revient à supposer $\omega = 1$). Dans ces conditions la vitesse de M est égale au vecteur obtenu en faisant tourner $\overrightarrow{IM}$ de $+\frac{\pi}{2}$ [dans le sens (IJ, IT)]. L'accélération de M est un vecteur équipollent à $\overrightarrow{MJ}$.

Nous dirons qu'un tel mouvement est « *géométrique* ». On peut toujours le supposer réalisé à partir d'un mouvement donné, par un changement convenable d'horloge. La donnée géométrique des points I et J doit donc suffire pour caractériser, à un instant donné, les divers éléments géométriques des trajectoires et des enveloppes.

11. Circonférence des inflexions.** — *A un instant donné le lieu des points du plan mobile dont la trajectoire présente une inflexion (courbure nulle) est la circonférence décrite sur* IJ *comme diamètre.*

rieur est en effet égal au produit de l'accélération normale par la longueur $\overline{\mathrm{IM}}$, toutes deux mesurées sur un axe portant $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$. En appelant P le centre de courbure en M, ce produit est donc égal à

$$\frac{v^2}{\overline{\mathrm{MP}}}.\overline{\mathrm{IM}} = -\omega^2.\left(\overrightarrow{\mathrm{IM}}.\overrightarrow{\mathrm{JM}}\right).$$

Mais le carré de la vitesse a pour valeur

En remplaçant dans l'équation précédente, ω^2 s'élimine et l'on obtient

$$\frac{\mathrm{IM}^3}{\overline{\mathrm{MP}}} = -\left(\mathrm{IM}.\mathrm{JM}\right).$$

On donne à cette formule un aspect plus élégant en introduisant le point de rencontre N de MI avec la circonférence des inflexions; c'est la projection de J sur MI de sorte que

d'où, après simplification, l'égalité

On en déduit immédiatement une construction de P (¹). On peut encore l'écrire

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{IP}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{IN}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{IM}}}$$

en prenant pour seule origine des segments le point I.

13**. **Courbure d'une enveloppe.** — Considérons une courbe E_2 du plan P_2 et M l'un de ses points de contact, à l'instant t, avec son enveloppe E_1.

Soit m le point mobile dans P_1 et P_2, qui à chaque instant coïncide avec le point de contact de E_2 et E_1; les trajectoires de m dans P_1 et P_2 sont respectivement les courbes E_1 et E_2. A l'instant t ses vitesses absolue $\vec{v}_1$ et relative $\vec{v}_2$

---

la trajectoire qui passe par I y présente, non pas une inflexion, mais un rebroussement; l'accélération normale est nulle en I parce que la *vitesse*, mais non la *courbure*, s'y annule.

(¹) La figure 2** donne une construction de P : on joint MJ; en I on élève la perpendiculaire à MI : soit Q le point d'intersection; en Q on mène la parallèle à IJ : P est son point d'intersection avec MI, comme il résulte de la considération des triangles semblables JMN, QMI et JMI, QMP.

sont portées par la tangente commune en M à E_1 et E_2 ; il en est donc de même de leur différence, qui est la vitesse d'entraînement, et qui par suite est perpendiculaire à IM :

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}.$$

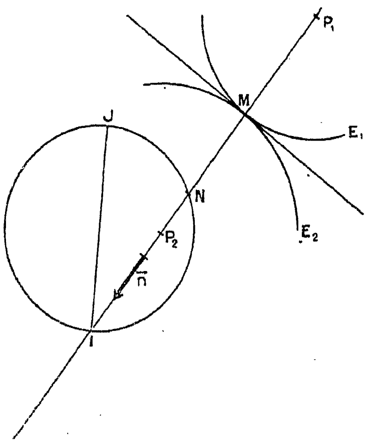
Calculons la vitesse absolue $\vec{v}_1$ de m ; elle est constamment perpendiculaire à $\overrightarrow{Im}$, donc

$$\overrightarrow{Im} . \vec{v}_1 = 0.$$

Dérivons cette égalité, par rapport à t, dans le plan P_1 ; la dérivée du vecteur $\overrightarrow{Im}$ est sa vitesse absolue, c'est-à-dire la différence des vitesses absolues de ses extrémités ; nous obtenons, à l'instant t,

$\vec{\gamma}_1$ étant l'accélération absolue de m, son produit par $\overrightarrow{IM}$ est le produit de la mesure de $\overrightarrow{IM}$ par la mesure de l'accélération normale. Donc, en désignant par P_1 le centre de courbure de E_1 en M, on a, quel que soit le sens choisi sur la normale MI,

Fig. 3**.



En transportant dans l'égalité précédente on obtient, après avoir groupé dans un même membre les termes en v_1^2,

$$\overline{IM} \qquad \overline{IP_1}$$

14. Formule d'Euler-Savary.** — *La relation entre les centres de courbure* P_1 *de l'enveloppe et* P_2 *de l'enveloppée*

est appelée formule d'Euler-Savary.

En supposant que l'enveloppée se réduit à un point, dont l'enveloppe est la trajectoire, on retrouve l'expression du n° **12**** pour le rayon de courbure : trajectoire.

La démonstration reste vraie, même si IM est nul et s'applique notamment à la base et à la roulette : les centres de courbure J_1 et J_2 de ces courbes sont sur la droite IJ et tels que

$$\frac{1}{\overline{IJ_2}} - \frac{1}{\overline{IJ_1}} = \frac{1}{\overline{IJ}}.$$

Cette formule permet de déterminer le centre des inflexions J lorsque l'on connaît les centres de courbure de la base et de la roulette en leur point de contact I. On en déduit notamment les cas particuliers suivants :

Si les concavités de la base et de la roulette sont opposées, $\overline{IJ_2}$ et $\overline{IJ_1}$ sont de signes contraires ; $\overline{IJ}$ est toujours du signe de $\overline{IJ_2}$: le centre des inflexions est du côté de la concavité de la roulette ;

Si la base est une droite, $\overline{IJ_1}$ est infini : le centre des inflexions est confondu avec le centre de courbure J_2 de la roulette ;

Si la roulette est une droite, $\overline{IJ_2}$ est infini : le centre des inflexions est symétrique par rapport à I du centre de courbure J_1 de la base ;

Si la base et la roulette sont deux courbes égales de concavités opposées, le point J est le milieu du segment IJ_2.

La formule d'Euler-Savary n'est pas symétrique par rapport au centre de courbure de l'enveloppe et de l'enveloppée ; cela tient à ce que l'on considère le mouvement de P_2 par rapport à P_1. Dans le mouvement inverse de P_1 par rapport à P_2, les vitesses d'entraînement des points sont opposées : par suite le nouveau centre des inflexions J' dont la vitesse d'entraînement est équipollente à $\vec{w}$ est symétrique de J par rapport à I. Il en est de même de la nouvelle circonférence des inflexions et par suite dans l'égalité d'Euler-Savary $\overline{IN}$ est bien remplacé par son opposé $\overline{IN'}$.

Enfin, si l'on désigne par θ l'angle de deux axes pris sur la normale en I à la base et à la roulette et sur la normale en M à l'enveloppe et à l'enveloppée, $\overline{IN}$ est égal à $\overline{IJ}.\cos\theta$, en prenant les mesures sur ces axes. En remplaçant dans la formule on voit que :

A l'instant t, en tout point de contact M *d'une courbe* E_2 *avec son enveloppe* E_1 *l'expression*

$$\frac{1}{\overline{IP_2}} \quad \frac{1}{\overline{IP_1}}$$

a une valeur constante et égale en particulier à

$$\frac{1}{\overline{IJ_2}} - \frac{1}{\overline{IJ_1}} \quad \frac{1}{\overline{IJ}}$$

C'est une autre forme du résultat d'Euler-Savary.

Si l'enveloppe E_1 est une droite, on en déduit que :

$$\frac{1}{\overline{IP_2}}\cos\theta = \frac{1}{\overline{IJ}};$$

le point P_2 est sur la circonférence des inflexions; *la circonférence des inflexions est donc le lieu des centres de courbure (aux points de contact) des courbes mobiles* E_2, *qui ont une droite pour enveloppe.*

Si l'enveloppée E_2 est une droite, on en déduit que :

$$\frac{1}{\overline{IP_1}}\cos\theta = -\frac{1}{\overline{IJ}};$$

le point P_1 est sur la circonférence symétrique de celle des inflexions par rapport à I. Cette circonférence est connue sous le nom de *circonférence des rebroussements; c'est le lieu des centres de courbure (aux points de contact) des enveloppes* E_1 *des droites du plan mobile;* c'est en particulier le lieu de ceux de ces points de contact qui sont des points de rebroussement (à rayon de courbure nul) des enveloppes E_1.

On pourra faire diverses applications des résultats précédents au mouvement de l'ellipsographe étudié au n° 165, au mouvement inverse, à l'étude de la cycloïde (n° 119), des hypo- ou épicycloïdes (n° 120).

TABLE ALPHABÉTIQUE DES DÉFINITIONS.

(Les numéros sont ceux des paragraphes.)

A.

Abscisse 42
Absolu (Mouvement, trajectoire, vitesse, accélération) 225
Accélération d'un point 212
Angle polaire d'un point dans un plan 51
Angles polaires d'une droite dirigée 57
— d'Euler 63
Applicables (Surfaces) 155
Arc d'une courbe sur une surface 152
Arête de rebroussement d'une surface développable 167
Axe (Droite dirigée ou) 6
— central d'un système de vecteurs 200
— d'un mouvement de rotation 217
— d'un mouvement de rotation et glissement 218
— instantané de rotation et glissement 221
— de révolution d'une surface de révolution 148
Axiale (Grandeur) 39
Axoïdes (Surfaces) 231

B.

Base (Surface) 231
Binormale 122

Caractéristique (Point) sur une courbe d'une famille 164
Carré d'un vecteur ou produit intérieur par lui-même 21
Central (Axe) d'un système de vecteurs 200
— (Point) sur une génératrice d'une surface réglée 149
Centre des moments 174
— de courbure d'une courbe plane ou gauche 107, 123
Centripète (Accélération) 212
Champ de moments 183
— de scalaires 8*
— de vecteurs 143, 8*

Chasles (Théorème de) 11
— (Formule de) 149
Chemin (pour une fonction de deux variables) 133
Circulation (ou travail) d'un champ de vecteurs sur une courbe 20*
Classe d'un point d'une courbe (Halphen) 106
Coefficient angulaire d'une droite (dans un plan) 46
Colatitude d'un point sur une sphère 57, 148
Complémentaire (Accélération), ou de Coriolis 227
Complexe linéaire de droites 204
Composantes d'un vecteur sur trois axes 13
Composée (Fonction vectorielle) 133
Composition des accélérations d'un point 227
— des vitesses d'un point 226
— des vitesses d'un solide 228
Conique (Point) d'une surface 145
— (Surface) 147
Conoïde (Surface) 150
Contact de deux courbes 113
Continuité d'une fonction vectorielle 80, 134
Contravariantes (Coordonnées d'un vecteur) 2*
— (Substitutions linéaires) 3*
Coordonnées cartésiennes 14
— rectangulaires d'un point 42, 54
— contravariantes d'un vecteur 2*
— curvilignes 136, 6*
— cylindriques (ou polaires) 7*
— polaires 50, 51, 7*
— sphériques 7*
— de Plücker d'une droite 176
— d'un vecteur glissant 175
— d'un système de vecteurs 182
Coriolis (Accélération de) ou complémentaire 227
Cosinus directeurs d'une droite dirigée 44, 56
— (Tableau des neuf) d'un changement d'axes 60, 61
Couple de vecteurs (système particulier) 198
Courbure d'une courbe gauche 123
— d'une courbe plane 99
Curl (ou rotationnel) 15*
Curvilignes (Coordonnées) 136, 6*
Cycloïde 119
Cylindrique (Surface) 146

D.

Demi-droite ou droite dirigée 44
Dérivée d'une fonction vectorielle 82

Dérivée d'un système de vecteurs 193
— d'un champ suivant un vecteur 11*
— partielles d'une fonction vectorielle 137
— successives d'une fonction vectorielle 83, 140
Dérivées (Grandeurs) 36
Déterminant d'un trièdre 1*
— fonctionnel ..... 139 (Note)
Développables (Surfaces) 167
Développantes d'une courbe plane ou gauche 110, 168
Développées d'une courbe plane ou gauche 107, 169
Diamètre d'une parabole 117
Différence de deux vecteurs 10
— de deux systèmes de vecteurs 190
Différentielle totale 139
Différentielles premières d'une fonction vectorielle 85
— d'ordre supérieur à 1 ..... 88, 141
Dimensions (Formule ou symbole, ou équation de) 37
Direct (Trièdre ou sens de rotation) 17
Directement perpendiculaire (Axe) à un plan orienté 28
— (Axe) à un autre axe dans un plan orienté 28
Direction d'un vecteur 3
Directrice d'une parabole 117
— d'une surface conique ou cylindrique 146, 147
Divergence d'un champ de vecteurs 14*
Division géométrique 30
Dirigée (Droite) ou axe 6, 44
ds^2 d'une surface 152

E.

Élémentaires (Opérations) sur un système de vecteurs 194
Égalité vectorielle 5
Éléments de réduction d'un système de vecteurs 182
Ellipse 116
Ellipsographe (Mouvement de l') 165
Elliptique (Point) d'une surface 160
Entraînement (Mouvement, vitesse, accélération d') 225
Enveloppe d'une famille de courbes 163
Épicycloïde 120
Équation d'une courbe 65
— d'une droite; d'un plan 66, 72
— intrinsèque d'une courbe 166
— intrinsèque d'un mouvement 209
— normale d'une droite 69
— normale d'un plan 73
— polaire d'une droite 70

Équations d'une droite dans l'espace 74
Équipollence de deux vecteurs 5
Équivalence de deux systèmes de vecteurs 186, 194
Euler (Angles d') 63
Extérieur (Produit) de deux vecteurs 24, 5*

F.

Faisceau linéaire de systèmes de vecteurs 202
Famille de courbes 161
Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface 18*
Fonction linéaire 77
— homographique 78
— vectorielle 79, 132, 143
Fondamentales (Grandeurs) 36
Forme polaire d'un vecteur 50
Formes différentielles fondamentales d'une surface 152, 156
Frenet (Formules de) 100, 125
— (Trièdre de) 100, 125

G.

Génératrice d'une surface cylindrique 146
— d'une surface conique 147
— d'une surface réglée 149
Glissant (Grandeur vectorielle ou vecteur) 171
Glissement (Mouvement de rotation et de) 218
— (Vitesse de) de deux solides en contact 230
Gradient d'un champ de scalaires 12*
Grandeurs scalaires, vectorielles 1
— fondamentales, dérivées 36
— axiales, polaires 39
Graphique (Point d'inflexion) 105
Green (Formule de) 18*

H.

Hélices 129
Hélicoïdal (Mouvement) 218
Hélicoïde (Surface) 150
Hodographe d'une fonction vectorielle 81, 135
— d'un mouvement 212
Hyperbole 116
Hyperbolique (Point) d'une surface 160
Hypocycloïde 120

Moment résultant d'un système de vecteurs 182
— résultant d'un sytème de vecteurs par rapport à un axe 185
— relatif de deux systèmes de vecteurs 192
— spécifique (ou superficielle ou linéaire) 195
— nul (Droites de) 201

N.

Nappes d'une surface 144
Niveau (Surfaces de) 8*
Nœuds (Ligne des) 63
Normal (Plan) à une courbe gauche 121
— (Vecteur) à une surface 144
Normale à une courbe plane 97
— à une surface 144
— principale à une courbe gauche 122
Nul (Vecteur) 3
— (Système de vecteurs) 188
— (Droite de moment) dans un système de vecteurs 201
Nutation (Angle de) 63

O.

Opérations élémentaires sur un système de vecteurs 194
Opposés (Vecteurs) 9
— (Systèmes de vecteurs) 190
Ordinaire (Point) d'une courbe plane ou gauche 104, 128
— (Point d'une surface) 144
Ordonnée 42
Ordre d'un infiniment petit vectoriel 94
— d'un contact de deux courbes 113
— d'un point d'une courbe plane 106
Orientation de l'espace 17
Orthogonale (Trajectoire) 162
— (Substitution) 4*
Osculateur (Plan) à une courbe gauche 122, 130
— (Plan) stationnaire 131
Osculatrice (Courbes) 113

P.

Parabole 117
Parabolique (Point) d'une surface 160
Parallèles (Courbes) 111
— d'une surface de révolution 148
Paramètre d'une parabole 117
— de distribution sur une génératrice d'une surface réglée 149

Paramètres directeurs d'une droite........................ 47, 59
— directeurs principaux d'une droite dirigée.................. 44, 56
Pas d'une hélice ou d'un mouvement hélicoïdal........................ 218
Pente d'une droite.. 46
Perpendiculaire commune à deux droites........................ 77
Pivotement (Rotation de).. 230
Plan orienté.. 28
Polaire (Forme) d'un vecteur.. 50
— (Grandeur).. 39
— (Surface).. 169
Polaires (Angles) d'une droite dirigée........................ 57
— (Coordonnées).. 51, 7*
Point simple à courbure non nulle (ou point ordinaire)........................ 104
— d'inflexion.. 105
— de rebroussement.. 106*
Pôle d'un système de coordonnées curvilignes........................ 6*
Précession (Angle de).. 63
Primitives d'une fonction vectorielle........................ 96
Produit d'un vecteur par un scalaire........................ 7
— d'un système de vecteurs par un scalaire........................ 191
— intérieur ou scalaire de deux vecteurs........................ 18
— extérieur de deux vecteurs........................ 24
— mixte de trois vecteurs........................ 32
— de deux systèmes de vecteurs........................ 192
— (Double) extérieur.. 35
Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe........................ 22
Projections.. 13.

Q.

Quotient d'un vecteur par un scalaire........................ 7
— d'un système de vecteurs par un scalaire........................ 191

Rapport de deux vecteurs de même direction........................ 6
Rayon vecteur (en coordonnées polaires)........................ 51
— de courbure d'une courbe plane ou gauche........................ 99, 123
— de torsion d'une courbe gauche........................ 124
Rebroussement (Point de) d'une courbe........................ 106, 131
— (Point de) d'une surface........................ 145
— (Arête de) d'une surface développable........................ 167
Rectifiant (Plan) d'une courbe gauche........................ 122
Réduction (Éléments de) d'un système de vecteurs........................ 197
Règle du parallélogramme........................ 8
Réglée (Surface).. 149

Relatif (Mouvement, vitesse, trajectoire, accélération) ... 225
Repères d'un mouvement ... 209
Résultante générale d'un système de vecteurs ... 182
— spécifique (ou superficielle ou linéaire) ... 195
Révolution (Surface de) ... 148
Rotation propre (Angle de) ... 63
— (Mouvement de) ... 217
— (Vecteur) instantanée ... 219, 217
— (Mouvement de) tangent ... 222
Rotationnel d'un champ de vecteurs ... 15*
— (Formule du) ... 19*
Roulement (Mouvement de) sans glissement ... 232
— (Rotation de) ... 230
Roulette (Surface) ... 231

S.

Scalaires (Champ de) ... 8*
— Scalaire (Grandeur) ... 1
Segment ... 2
Sens d'un trièdre, de rotation autour d'un axe, de rotation dans un plan opaque ... 16
— de la courbure d'une courbe plane ou gauche ... 99, 123
— de la concavité d'une courbe plane ... 99
Simple (Point) d'une courbe plane ou gauche ... 104, 128
Singulier (Point) d'une courbe, d'une surface ... 106, 131, 145
Somme de vecteurs ... 8
— de systèmes de vecteurs ... 189
Sommet d'une ellipse ... 116
— d'une parabole ... 117
— d'une surface conique ... 147
Spécifique (Résultante ou moment) ... 195
Sphériques (Coordonnées) ... 7*
Stationnaire (Point à tangente) ... 105
— (Point à plan osculateur) ... 131
Stokes (Formule de) ... 20*
Substitutions linéaires ... 3*
Superficiel (Résultante ou moment) ... 195
Supplémentaires (Trièdres) ... 1*
Symétrique gauche (Tableau) ... 183
Symétriques (Substitutions linéaires) ... 3*
Système de vecteurs glissants ... 181

T.

Tableau de coefficients d'une substitution ... 3*
Tangent (Plan) à une surface ... 144

Tangent (Mouvement), à un instant, à un autre mouvement........... 215
— (Trièdre) à un système de coordonnées curvilignes................. 6*
Tangente à une courbe plane ou gauche...................... 97, 121
— (Point à) stationnaire.................................... 105
Tangentielle (Accélération)................................. 212
Taylor (Formule de), fonctions d'une variable.................. 94
— fonctions de plusieurs variables............................ 141
Thalès (Théorèmes de)... 15
Torsion d'une courbe gauche.................................. 124
Tourbillon ou rotationnel d'un champ de vecteurs................ 13*
Trajectoire du mouvement d'un point.......................... 209
— d'une famille de courbes................................... 161
— orthogonale d'une famille de courbes....................... 162
Translation (Surface de)..................................... 150
— (Mouvement de)... 216
Travail d'un champ de vecteurs le long d'une courbe.............. 20*
Trièdre trirectangle... 16
— quelconque de repère.. 1*
— de Frenet d'une courbe plane ou gauche.................. 100, 125
— (Mouvement du) de Frenet................................... 224

V.

Varignon (Théorème de)....................................... 177
Vecteur... 2
— nul... 3
— unité ou vecteur unitaire..................................... 6
— opposé.. 9
— dérivé d'une fonction vectorielle............................. 82
Vecteurs directement perpendiculaires dans un plan orienté....... 28
— coplanaires... 33
Viration de surfaces réglées.................................. 232
Vitesse (vecteur ou scalaire) d'un point...................... 210
— d'un vecteur.. 211
— d'un solide... 220

II. — *Changement d'axes en Géométrie plane.*

Pages.
48. Énoncé du problème 69
49. Formules de transformation 70

III. — *Coordonnées polaires.*

50. Forme polaire d'un vecteur 71
51. Coordonnées polaires d'un point 73
52. Produits intérieur et extérieur de deux vecteurs 73
53. Distances et aires 74

IV. — *Angles et distances en Géométrie de l'espace.*

54. Coordonnées rectangulaires 74
55. Distance de deux points 75
56. Détermination d'une demi-droite ou droite dirigée 75
57. Angles polaires d'une droite dirigée 76
58. Angle de deux droites dirigées 77
59. Paramètres directeurs 78

V. — *Changement d'axes dans l'espace.*

60. Énoncé du problème ; tableau des neuf cosinus 79
61. Relations entre les termes du tableau 80
62. Formules de transformation 82
63. Angles d'Euler 83
64. Formules d'Euler 86

VI. — *Équation d'une droite dans un plan.*

65. Équation d'une courbe 87
66. Droites et équations linéaires 88
67. Méthode du produit intérieur 88
68. Méthode du produit extérieur 90
69. Formes diverses d'équations d'une droite 92
70. Équation polaire 93

VII. — *Équation d'un plan et équations d'une droite.*

71. Équations linéaires à trois variables 94
72. Équation d'un plan 94
73. Formes diverses d'équations d'un plan 96
74. Équations d'une droite 96
75. Intersection de deux plans 99

VIII. — *Représentation paramétrique d'une droite.*

Pages.
76. Définition paramétrique d'une courbe.......................... 99
77. Fonction linéaire.......................... 100
78. Fonction homographique.......................... 101

CHAPITRE III.

Fonctions vectorielles d'une variable scalaire.

I. — *Dérivée géométrique d'un vecteur.*

79. Définition d'une fonction vectorielle.......................... 103
80. Limites et continuité.......................... 103
81. Hodographe ou indicatrice.......................... 106
82. Dérivée d'un vecteur; ligne d'action et mesure du vecteur dérivé.......................... 107
83. Fonction dérivée. Dérivées successives.......................... 110
84. Changement de variable dans la dérivée première.......................... 110
85. Différentielles premières.......................... 111
86. Calcul des dérivées et différentielles premières.......................... 112
87. Changement de variable dans les dérivées d'ordre supérieur.......................... 114
88. Différentielles d'ordre supérieur.......................... 115
89. Vecteur de direction fixe.......................... 118
90. Vecteur de module constant.......................... 118
91. Vecteur de module constant dans un plan.......................... 119
92. Projections des dérivées.......................... 120
93. Dérivées première et seconde en coordonnées polaires.......................... 121
94. Formule de Taylor.......................... 123
95. Vecteur dérivé nul.......................... 126
96. Primitives.......................... 126

II. — *Courbes planes.*

97. Tangente à une courbe plane.......................... 127
98. Courbe en coordonnées polaires.......................... 129
99. Courbure d'une courbe plane.......................... 130
100. Trièdre de Frenet.......................... 132
101. Expression vectorielle de la courbure.......................... 133
102. Expression cartésienne de la courbure.......................... 135
103. Expression de la courbure en coordonnées polaires.......................... 136
104. Point simple à courbure non nulle.......................... 137
105. Point d'inflexion.......................... 141
106. Point de rebroussement.......................... 143
107. Centre de courbure et développée.......................... 147
108. Arc de développée.......................... 149
109. Points singuliers de la développée.......................... 150

Pages.
110. Développante ... 153
111. Courbes parallèles ... 154
112. Détermination du centre de courbure ... 155
113. Contact de deux courbes ... 156

III. — *Exemples de courbes planes.*

114. Droite ... 160
115. Circonférence ... 160
116. Ellipse ... 161
117. Parabole ... 162
118. Lemniscate ... 166
119. Cycloïde ... 168
120. Hypocycloïde à quatre rebroussements ... 170

IV. — *Courbes gauches.*

121. Tangente et plan normal ... 173
122. Plan osculateur ... 174
123. Courbure d'une courbe dans l'espace ... 176
124. Torsion d'une courbe gauche ... 178
125. Trièdre et formules de Frenet ... 180
126. Expression de la courbure ... 181
127. Expression de la torsion ... 182
128. Point simple à courbure et torsion non nulles ... 184
129. Application aux hélices ... 186
130. Définitions diverses du plan osculateur ... 188
131. Points exceptionnels ... 190

CHAPITRE IV.

Fonctions vectorielles de deux variables.

I. — *Dérivées partielles d'un vecteur.*

132. Définition d'une fonction vectorielle de deux variables ... 194
133. Chemin ... 195
134. Limites et continuité ... 195
135. Hodographe ... 196
136. Étude d'une surface; coordonnées curvilignes ... 197
137. Dérivées partielles ... 197
138. Dérivée d'une fonction composée ... 199
139. Différentielle totale ... 200
140. Dérivées successives ... 202
141. Différentielles successives. Formule de Taylor ... 202

Pages.

173. Propriétés du moment 264
174. Centre des moments 265
175. Coordonnées d'un vecteur glissant 265
176. Coordonnées de Plücker d'une droite 266
177. Théorème de Varignon 267
178. Moment par rapport à un axe 268
179. Moment relatif de deux vecteurs 270
180. Vecteurs glissants coplanaires 271

II. — *Systèmes de vecteurs glissants.*

181. Définition et notations 272
182. Éléments de réduction et coordonnées d'un système 272
183. Champ des moments 273
184. Invariants d'un système 276
185. Moment d'un système par rapport à un axe 276
186. Équivalence de deux systèmes 277
187. Opérations sur les systèmes de vecteurs 278
188. Système nul 278
189. Somme de deux systèmes 279
190. Systèmes opposés ou en équilibre 280
191. Produit par un scalaire 281
192. Produit ou moment relatif de deux systèmes 281
193. Dérivée d'un système de vecteurs 283
194. Équivalence et opérations élémentaires 284
195. Distribution continue de vecteurs 289
196. Opérations sur les systèmes continus 291

III. — *Réduction d'un système de vecteurs.*

197. Définition de la réduction 292
198. Couple 292
199. Divers cas de réduction 294
200. Axe central d'un système de vecteurs 295
201. Droites de moment nul 298
202. Faisceau linéaire de systèmes 300
203. Réduction d'un système à deux vecteurs 301
204. Notions sur la Géométrie des droites 303

IV. — *Systèmes particuliers de vecteurs.*

205. Vecteurs dans un même plan 306
206. Vecteurs concourants 306
207. Vecteurs parallèles 306
208. Centre de vecteurs parallèles 307

CALCUL VECTORIEL

THÉORIE

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET CINÉMATIQUES

DESTINÉ AUX ÉLEVES DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET AUX ÉTUDIANTS EN SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

PAR

A. CHATELET

ANCIEN ÉLÈVE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
DOYEN
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LIL

J. KAMPE DE FÉRIET

MAITRE DE CONFÉRENCES DE MÉCANIQUE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE,
PROFESSEUR DE MÉCANIQUE
A L'INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

(une masse, une résistance électrique, etc.), d'autres un nombre affecté d'un signe (une quantité d'électricité, le travail d'une force, etc.).

Les grandeurs du deuxième groupe sont caractérisées ou définies par : un *nombre*, mesure de leur intensité, et une *direction géométrique*, fixant leur orientation par rapport à des repères; on y joint parfois la donnée d'un *point d'application* qui achève de déterminer leur position par rapport aux repères. De telles grandeurs sont appelées *dirigées* ou encore *vectorielles* parce qu'elles sont susceptibles d'être représentées par des vecteurs ([1]).

Exemples : un déplacement de translation, la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, une force, une pression ou une tension en un point d'une surface, une percussion, la rotation d'un solide (autour d'un axe), un champ électrique ou magnétique, etc.

2. Vecteurs. — *On appelle* vecteur *une portion de droite comprise entre deux points, sur laquelle on distingue une « origine » et une « extrémité ».*

On peut réserver le mot *segment* au cas d'une portion de droite sans distinction d'origine. Un vecteur est donc un « segment dirigé ».

Nous représenterons un vecteur par deux lettres désignant, la première l'origine, la seconde l'extrémité, ces lettres étant surmontées d'une flèche :

Pour la commodité de l'écriture et des calculs, nous représenterons aussi souvent un vecteur par une seule lettre, que nous surmonterons encore d'une flèche :

$$\vec{a},$$

la flèche servant seulement à rappeler à l'esprit la signification spéciale de la lettre ([2]).

([1]) Les deux expressions « scalaire » et « vectoriel » ont été introduites vers 1843 par le mathématicien anglais Hamilton : scalaire, de *scala*, échelle, suggère la notion d'une échelle de mesure; vecteur, de *vehere*, transporter, suggère la notion d'un transport d'un point vers un autre.

([2]) Les notations de la théorie des vecteurs sont très différentes suivant les auteurs. Pour représenter un vecteur donné par son origine A et son extrémité B, on ren-

(une masse, une résistance électrique, etc.), d'autres un nombre affecté d'un signe (une quantité d'électricité, le travail d'une force, etc.).

Les grandeurs du deuxième groupe sont caractérisées ou définies par : un *nombre*, mesure de leur intensité, et une *direction géométrique*, fixant leur orientation par rapport à des repères; on y joint parfois la donnée d'un *point d'application* qui achève de déterminer leur position par rapport aux repères. De telles grandeurs sont appelées *dirigées* ou encore *vectorielles* parce qu'elles sont susceptibles d'être représentées par des vecteurs [1].

Exemples : un déplacement de translation, la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, une force, une pression ou une tension en un point d'une surface, une percussion, la rotation d'un solide (autour d'un axe), un champ électrique ou magnétique, etc.

2. **Vecteurs.** — *On appelle* vecteur *une portion de droite comprise entre deux points, sur laquelle on distingue une « origine » et une « extrémité ».*

On peut réserver le mot *segment* au cas d'une portion de droite sans distinction d'origine. Un vecteur est donc un « segment dirigé ».

Nous représenterons un vecteur par deux lettres désignant, la première l'origine, la seconde l'extrémité, ces lettres étant surmontées d'une flèche :

$$\overrightarrow{AB}.$$

Pour la commodité de l'écriture et des calculs, nous représenterons aussi souvent un vecteur par une seule lettre, que nous surmonterons encore d'une flèche :

la flèche servant seulement à rappeler à l'esprit la signification spéciale de la lettre [2].

---

[1] Les deux expressions « scalaire » et « vectoriel » ont été introduites vers 1843 par le mathématicien anglais Hamilton : scalaire, de *scala*, échelle, suggère la notion d'une échelle de mesure; vecteur, de *vehere*, transporter, suggère la notion d'un transport d'un point vers un autre.

[2] Les notations de la théorie des vecteurs sont très différentes suivant les auteurs. Pour représenter un vecteur donné par son origine A et son extrémité B, on ren-

La droite indéfinie, menée par A parallèlement à la direction du vecteur, et qui par suite porte ce vecteur, est appelée *ligne d'action* ou encore *support* de ce vecteur.

Vecteur nul. — Lorsque l'extrémité d'un vecteur coïncide avec son origine, on dit que c'est un vecteur nul. Tout vecteur nul a pour module o, sa direction et son sens sont indéterminés.

4. **Représentation d'une grandeur vectorielle.** — Une *grandeur vectorielle* est de même définie par quatre éléments :

1° Son « origine » ou « point d'application » ;
2° Sa direction (comparable à celle d'une droite passant par le point d'application);
3° Son sens (comparable à un sens de parcours sur la direction);
4° Son « module », qui est son rapport à la grandeur choisie pour unité.

Le choix de la grandeur unité est théoriquement arbitraire; pratiquement, il est souvent imposé par les habitudes ou les circonstances. En particulier, si l'on utilise dans une même question des grandeurs d'espèces différentes, le choix des unités pour certaines d'entre elles entraîne le choix des unités pour les autres, qui ont ainsi des *dimensions* par rapport aux premières (*voir* § VII).

Sur les figures, on représente les grandeurs vectorielles par des vecteurs; cette représentation doit notamment être effective dans les théories (statique graphique, cinématique graphique) où l'on remplace les calculs par des opérations graphiques sur des vecteurs; elle suppose implicitement que l'on a adopté : 1° une unité d'intensité U pour le type de grandeurs envisagé; 2° une longueur l pour représenter le module de cette unité U. Le choix de U et de l caractérise l'*échelle* du dessin. On représente alors une grandeur vectorielle, du type considéré, par un vecteur ayant comme point d'application, direction et sens les éléments correspondants de cette grandeur; en outre, la longueur du vecteur doit être telle que son rapport à l soit précisément égal à la mesure de l'intensité de la grandeur par rapport à U.

Dans l'écriture, on représente les grandeurs vectorielles par les

dont le vecteur unitaire est $\vec{u}$, on a

vecteur, parallèle à l'axe, de mesure $k = k.\vec{u}$.

Enfin on a, quels que soient le vecteur $\vec{a}$ et les scalaires k, l'identité

Dans le premier membre, les points représentent des produits de scalaires par un vecteur; dans le second membre, le point de la parenthèse représente un produit de scalaires; le point à droite représente le produit d'un scalaire par un vecteur [1]. Pour établir cette identité, considérons les vecteurs parallèles à $\vec{a}$:

Prenons $\vec{b}$ comme unité, les mesures de $\vec{a}$ et de $\vec{c}$ sont respectivement $\frac{1}{k}$ et k'; le rapport de $\vec{c}$ à $\vec{a}$ est le quotient de ces mesures :

$$k' : \frac{1}{k} = k.k'.$$

Donc

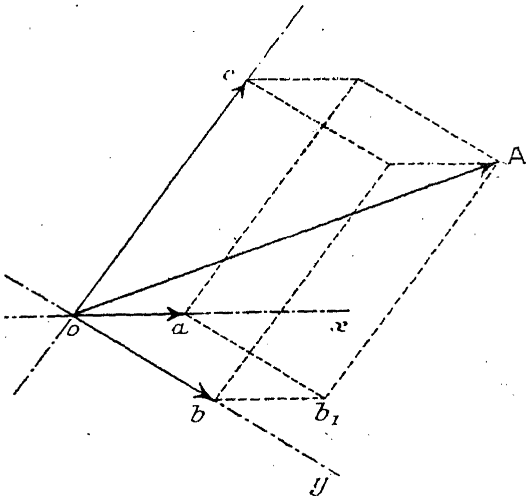
De cette identité, il résulte notamment que le *quotient d'un vec- r* $\vec{a}$ *par un scalaire* k (c'est-à-dire le vecteur $\vec{b}$ qui, multiplié par k, donne $\vec{a}$) est le produit de $\vec{a}$ par l'inverse de k :

[1] Suivant l'usage habituel du calcul algébrique, les parenthèses, dans une formule, signifient qu'il faut effectuer les opérations indiquées dans les parenthèses, puis, à partir des résultats obtenus, effectuer les opérations indiquées sur les parenthèses.

plan Oyz, *sur* Oy *parallèlement au plan* Ozx, *sur* Oz *parallèlement au plan* Oxy (¹).

Dans le dernier cas indiqué, les projections du vecteur sur chaque

Fig. 8.



axe parallèlement au plan des deux autres $\left(\overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Ob}, \overrightarrow{Oc}\right.$ sur la figure$\left.\right)$ sont appelées les *composantes* du vecteur par rapport à ces axes. Tout vecteur est ainsi la somme de ses composantes.

(¹) Cette évidence géométrique résulte en réalité des propriétés du parallélisme ou des translations. Soit, par exemple, à établir que les projections $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{a'b'}$ de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ équipollents sur des droites D et D′ parallèles sont des vecteurs équipollents. Considérons la figure constituée par $\overrightarrow{AB}$, les plans P_A, P_B projetant les points A et B, et enfin les points a et b respectivement dans P_A, P_B. Déplaçons cette figure par translation jusqu'à amener AB sur A′B′; les plans P_A, P_B restant parallèles à eux-mêmes viennent se superposer avec les plans projetant A′ et B′; les points a et b viennent en a_1, b_1 dans ces plans et la droite a_1b_1 étant restée parallèle à D, donc à D′, les vecteurs $\overrightarrow{a_1b_1}$ et $\overrightarrow{a'b'}$ sont des portions de droites parallèles comprises entre deux plans parallèles; ils sont donc équipollents et, comme $\overrightarrow{a_1b_1}$ a été déduit de $\overrightarrow{ab}$ par translation, la propriété est établie.

un seul vecteur de l'espace $\vec{a}$, défini par l'égalité précédente (à une équipollence près).

Cette égalité est susceptible de se mettre sous forme uniquement vectorielle. Désignons par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires sur les trois axes Ox, Oy, Oz ; le vecteur de mesure X sur Ox peut se représenter par $X.\vec{i}$, et de même pour les vecteurs des deux autres axes ; l'égalité précédente prend ainsi la forme plus simple

Dans cette égalité, le signe $+$ désignant l'addition géométrique a été défini au n° 8 ; le signe ., désignant le produit d'un vecteur par un scalaire, a été défini au n° 7. Les propriétés de ces deux opérations ont été indiquées aux n^{os} 7, 8 et 12 [notamment les identités (1), (1′), (1″)]. En utilisant ces propriétés, on peut ramener les relations et opérations définies entre vecteurs à des relations et opérations sur leurs projections ou coordonnées.

Il convient toutefois de remarquer que la représentation d'un vecteur par un système de trois nombres dépend essentiellement des axes adoptés [1] et présente, par suite, un *caractère relatif*. L'un des avantages du calcul vectoriel est de représenter des opérations et des relations d'une façon indépendante du choix des axes. Lorsqu'on les traduit par des opérations ou des relations sur les projections des vecteurs, on doit les obtenir indépendantes des axes, c'est-à-dire (pour adopter le langage de la géométrie analytique) *invariantes pour une transformation de coordonnées* [2].

15. Opérations sur les projections. — Soient deux vecteurs, et leurs projections sur trois axes Ox, Oy, Oz, de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

(1) On trouvera plus loin (n^{os} 49 et 62) les formules de transformation indiquant les relations entre les coordonnées d'un vecteur par rapport à deux systèmes d'axes.

(2) C'est une simplification du même genre qui se produit dans le *calcul tensoriel*. On y définit certains éléments géométriques, plus généraux que les vecteurs, et des relations et opérations sur ces éléments indépendantes des systèmes de repère.

dans les trois identités suivantes, où x, y et $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont des scalaires et des vecteurs quelconques :

(3) $$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a},$$

$$(x.\vec{a})\times(y.\vec{b})=(x.y).(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

En les réunissant on obtient l'expression plus générale d'un produit de deux expressions linéaires de vecteurs à coefficients scalaires :

$$=xx'.(\vec{a}\times\vec{a}')+xy'.(\vec{a}\times\vec{b}')+yx'.(\vec{b}\times\vec{a}')+yy'.(\vec{b}\times\vec{b}')+\ldots$$

Dans ces diverses formules le signe $+$ désigne, suivant le cas, l'addition algébrique [seconds membres des formules (3″) et (3‴)] ou l'addition géométrique (premiers membres des mêmes formules). Les signes $\times$, . désignent, soit des produits intérieurs de vecteurs, soit des produits de scalaires par des vecteurs, soit des produits de scalaires entre eux.

Démonstrations. — L'identité (3) résulte immédiatement de la définition, les deux vecteurs y jouant le même rôle.

Pour (3′), il suffit de remarquer que la mesure de $x.\vec{a}$ sur un axe quelconque est $x.\bar{a}$. Alors, d'après la définition du produit,

$$(x.\vec{a}).(y.\vec{b})=(x.\bar{a}).(y.\bar{b}).\cos\alpha=xy(\bar{a}.\bar{b}.\cos\alpha).$$

Enfin, pour l'identité (3″), considérons un axe $x'x$ portant $\vec{a}$, le premier membre est le produit des mesures sur $x'x$ de $\vec{a}$ et de la projection de $\vec{b}+\vec{c}$. Mais cette projection est la somme des projections et la mesure est la somme des mesures, donc

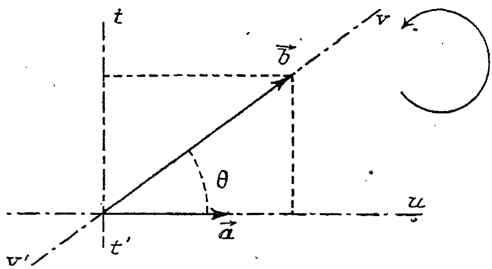
$$\bar{a}.\overline{\text{proj}.(b+c)}=\bar{a}.(\overline{\text{proj}.b}+\overline{\text{proj}.c})=\bar{a}.\overline{\text{proj}.b}+\bar{a}.\overline{\text{proj}.c}.$$

D'autre part, considérons deux axes, $u'u$ portant $\vec{a}$ et $v'v$ portant $\vec{b}$, leur angle θ est défini à un multiple de 2π près et la mesure du produit est donnée par l'expression

$$\text{mesure de } \vec{a} \wedge \vec{b} = \bar{a}.\bar{b}.\sin \theta, \qquad \theta = (u'u, v'v).$$

Effectivement, il suffit de décomposer $\vec{b}$ en deux vecteurs : l'un sur $u'u$, l'autre sur l'axe directement perpendiculaire $t't$. Si $\vec{u}$ et $\vec{t}$

Fig. 21.



sont les vecteurs unités sur ces axes, on a, d'après la définition de $\sin\theta$, $\cos\theta$:

$$\vec{b} = (\bar{b}.\cos\theta).\vec{u} + (\ldots$$

En multipliant extérieurement par $\vec{a} = \bar{a}.\vec{u}$, on obtient l'égalité cherchée :

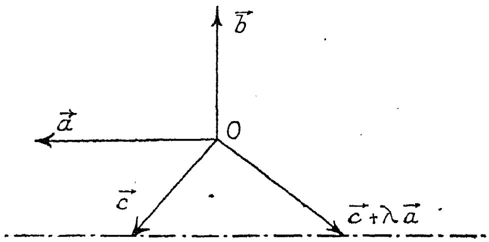
Si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont dans un plan non orienté, ou dans l'espace, l'angle θ n'est plus défini qu'au signe près, de sorte qu'on obtient seulement ainsi le *module* du produit extérieur [1]

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\bar{a}.\bar{b}.\sin\theta|.$$

[1] Par définition, ce module est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (n° 24). On peut considérer que la présente démonstration rétablit l'expression connue de l'aire d'un parallélogramme (ou, ce qui revient au même, d'un triangle), en fonction des côtés et de l'angle compris.

celui de $\vec{a}$ (cette dernière condition, en tenant compte, s'il y a lieu, des diverses espèces d'unités).

Fig. 22.



A partir de cette solution, on obtient toutes les autres; elles sont données par la formule

$$\vec{x} = \vec{c} + \lambda . \vec{a},$$

λ scalaire quelconque.

En effet, pour toute solution $\vec{x}$, on doit avoir

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a},$$

donc

$$(\vec{x} - \vec{c}) \wedge \vec{a} = 0.$$

Ceci exige que $(\vec{x} - \vec{c})$ soit parallèle à $\vec{a}$, donc de la forme $\lambda . \vec{a}$ on en déduit l'expression précédente de $\vec{x}$; la réciproque est immédiate : en substituant dans l'équation la forme indiquée pour $\vec{x}$, cette équation est bien vérifiée.

On déduit de là que, si l'on mène par une même origine O un vecteur $\overrightarrow{OI}$ équipollent à la solution cherchée, il y a une infinité de points I répondant à la question et leur lieu est une *droite parallèle au vecteur* $\vec{a}$, menée par l'extrémité I_0 du vecteur $\overrightarrow{OI_0}$, équipollent à $\vec{c}$, ou à toute autre solution particulière.

Mettons ce même problème sous forme analytique. Soient p, q, r les projections de $\vec{a}$ et (l, m, n) les projections de $\vec{b}$, le problème est équivalent à la résolution du système d'équations en x, y, z (com-

On obtient immédiatement l'expression de ce produit mixte en fonction des composantes des vecteurs. Soient :

$$\begin{array}{lcl} X,\ Y,\ Z \text{ les projections de } & & \vec{a}, \\ X',\ Y',\ Z' & \text{»} & \vec{b}, \\ X'',\ Y'',\ Z'' & \text{»} & \vec{c}. \end{array}$$

Les projections du produit $\vec{b} \wedge \vec{c}$ sont

$$Y'Z''-Z'Y'', \qquad Z'X''-X'Z'', \qquad X'Y''-Y'X''$$

et la valeur du produit intérieur est

$$Y.(Z'X''-X'Z'')+Z.(X'Y''-Y'X'').$$

On reconnaît là le développement du déterminant

$$\begin{matrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{matrix}$$

Comme on peut permuter circulairement les lignes d'un déterminant, sans changer sa valeur, il en résulte qu'on peut permuter circulairement les vecteurs du produit mixte

$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

D'autre part, un déterminant change de signe, si l'on permute seulement deux lignes, donc :

$$\wedge \vec{b}) = - \qquad = -\vec{b}.(\vec{a} \wedge \vec{c}).$$

Ces deux propriétés des déterminants se vérifient aisément sur l'expression développée indiquée pour le produit mixte.

Le produit mixte admet aussi une interprétation géométrique : c'est le *volume du parallélépipède* construit sur les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, affecté du signe + ou du signe —, suivant que les trois vecteurs forment un trièdre direct ou inverse (n° 16).

En effet $\vec{b} \wedge \vec{c}$ a pour module l'aire du parallélogramme construit

34. **Équation linéaire.** — Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ quatre vecteurs donnés et soit à résoudre l'équation aux variables scalaires

$$\vec{a}.x + \vec{b}.y + \vec{c}.z = \vec{d}.$$

Si le produit mixte

$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$$

n'est pas nul, les trois vecteurs forment un trièdre; prenons-le comme trièdre de repère, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ étant les vecteurs unitaires sur les axes; l'équation n'a qu'un système de solutions, x, y, z qui sont les composantes de $\vec{d}$ sur ces axes.

On peut en donner une forme explicite; il suffit de faire le produit extérieur des deux membres de l'égalité par $\vec{c}$, puis le produit intérieur par $\vec{b}$:

$$\vec{b}.\Big[c \wedge \qquad\qquad \cdot y + \vec{c}.z)\Big] = \vec{b}.(\vec{c}$$

En développant le premier membre et remarquant que $\vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{b})$ et $\vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{c})$ sont nuls, on obtient une égalité donnant la valeur de x :

On ferait de même pour y et z. En résumé :

$$\vec{d}.(\vec{b} \wedge \vec{c} \qquad\qquad \vec{a}.(\vec{d} \wedge \vec{c}) \qquad\qquad \frac{\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{d})}{\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})}$$

$$\wedge \qquad\qquad\qquad \wedge$$

Si le produit mixte est nul, l'équation est en général impossible. Les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont, ou dans un même plan, ou sur une même droite, ou tous les trois nuls. Il faut que le vecteur $\vec{d}$ soit, ou dans le plan, ou sur la droite, ou nul, et il y a alors une infinité de solutions : on peut naturellement préciser cette discussion.

Introduisons encore les composantes des vecteurs, suivant trois

axes rectangulaires

$$\vec{a} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k},$$

$$\ldots '\vec{j} + Z'\vec{k},$$

$$\vec{c} = X''\vec{i} + Y''\vec{j} + Z''\vec{k},$$

$$\vec{d} = p.\vec{i} + q.\vec{j} + r.\vec{k};$$

l'équation vectorielle considérée est équivalente au système de trois équations scalaires (obtenues en égalant les coefficients de

$$.z = p,$$

En explicitant en fonction des projections X, Y, ..., les expressions vectorielles données plus haut pour les solutions, on retrouve les expressions de Cramer, quotients de deux déterminants. Par exemple (1) :

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}$$

35. **Double produit extérieur** : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. — L'expression $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ s'entend d'elle-même; on fait le produit extérieur dans la parenthèse, puis le produit par $\vec{a}$ du vecteur ainsi obtenu.

Appelons toujours (X, Y, Z), (X', Y', Z'), (X'', Y'', Z'') les projections des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. On obtient sans peine les projections du double produit. Par exemple, sur Ox

$$\begin{aligned} Y(X'Y''-Y'X'') - Z(Z'X''-X'Z'') &= X'(YY''+ZZ'') \cdot \qquad \ldots '+ZZ') \\ &= X'(XX''+YY''+ZZ'') - X''(XX'+YY'+ZZ') \\ &= X'.(\vec{a}.\vec{c}) - X''.(\vec{a}.\vec{b}). \end{aligned}$$

(1) Un calcul analogue a été exposé récemment par M. Bouligand dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (avril 1923), paru pendant l'impression de cet ouvrage.

Du double produit on déduit une expression intéressante du produit composé scalaire $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d})$; en effet, ce produit composé n'est pas autre chose qu'un produit mixte où le premier facteur est un produit extérieur; donc en permutant les facteurs du produit mixte

d'où en remplaçant le double produit entre crochets par sa valeur

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{c}.[\vec{a}.(\vec{b}.\vec{d}) - \vec{b}.(\vec{a}.\vec{d})]$$
$$= (\vec{a}.\vec{c}).(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c}).$$

Cette formule contient comme cas particulier l'identité de Lagrange (nº 29); il suffit d'y faire $\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{d} = \vec{b}$.

35 *bis*. **Vecteur défini par ses projections orthogonales.** — La notion de double produit, jointe à la solution du problème du nº 34, permet de résoudre le problème suivant : *déterminer un vecteur* $\vec{u}$, *défini par les mesures* α, β, γ *de ses projections orthogonales sur trois axes* Ox, Oy, Oz *formant un trièdre, non trirectangle.*

Nous allons montrer qu'on peut déterminer le vecteur $\vec{u}$ en calculant ses *composantes* (nº 14) selon trois axes OX, OY, OZ définis de la manière suivante :

Appelons $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy, Oz; on a, évidemment,

$$\alpha = \vec{u}.\vec{i}, \qquad \beta = \vec{u}.\vec{j}, \qquad \gamma = \vec{u}.\vec{k}.$$

Formons les produits extérieurs des vecteurs unitaires

ces nouveaux vecteurs ne sont plus unitaires, mais constituent un second trièdre OX, Y, Z dont les arêtes sont respectivement perpendiculaires aux faces du premier. Formons les produits extérieurs de ces trois nouveaux vecteurs; on obtient, d'après l'expression

45. Angle de deux droites dirigées. — Soient deux droites dirigées It, $I't'$ de vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{u}'$, de cosinus directeurs (α, β), (α', β'), et soit V leur angle

$$V = (It, I't');$$

V étant mesuré dans le plan orienté est défini à un multiple de 2π près; ses trois rapports trigonométriques sont par suite définis; on obtient immédiatement leurs expressions (*voir* n^{os} 22 et 28) :

$$\cos V = \vec{u}.\vec{u}', \qquad \cos V = \alpha.\alpha' + \beta.\beta',$$
$$\sin V = \text{mesure}\left(\vec{u} \wedge \vec{u}'\right), \qquad \sin V = \alpha.\beta' - \beta.\alpha',$$
$$\operatorname{tang} V = \frac{\sin V}{\cos V} - \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha\alpha' + |}$$

Les conditions de perpendicularité et de parallélisme se déduisent immédiatement de ces formules ($\cos V = 0$ ou $\sin V = 0$) :

Perpendicularité.

Parallélisme..... $\vec{u} \wedge \vec{u}' = 0$

La condition de parallélisme revient encore à dire que α, β sont proportionnels à α', β'; le rapport de proportionnalité qui est celui de $\vec{u}$ à $\vec{u}'$ est nécessairement $+1$ ou -1 (selon que les deux vecteurs unitaires sont de même sens ou non).

Soit encore à trouver les cosinus directeurs α_1, β_1 d'une droite dirigée It_1 *directement perpendiculaire* (n° 28) à It de cosinus directeurs (α, β). Ils doivent vérifier les deux relations

$$\cos V = 0, \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 = $$

d'où

$$_1 = -\beta, \qquad \beta_1 = +\alpha.$$

On peut encore obtenir ces dernières formules en remarquant que $\vec{u}_1$, vecteur unitaire sur It_1, est égal à

$$\vec{k} \wedge \vec{u}_1$$

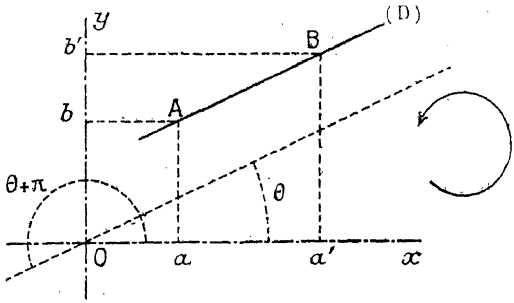
k étant le vecteur unitaire perpendiculaire au plan, du côté positif

(n° 28), par rapport au sens de rotation. On peut aussi augmenter θ de $+\frac{\pi}{2}$ dans les expressions $\cos\theta$, $\sin\theta$.

Remarquons enfin que les expressions de α_1, β_1 permettent de retrouver l'expression de $\sin V$ en la considérant comme le cosinus de l'angle

46. **Droite non dirigée.** — L'angle de Ox avec une droite non dirigée n'est plus défini qu'à un multiple de π près. Donc la tangente de cet angle est le seul rapport trigonométrique qui soit défini sans ambiguïté : on l'appelle ordinairement *coefficient angulaire* de la droite et l'on en obtient les diverses interprétations suivantes, immédiates sur la figure :

Fig. 28.



Le *coefficient angulaire*, ou *pente*, d'une droite (D) est :

1° La tangente de l'angle de Ox avec (D),

)x, D).

2° Le rapport des projections d'un vecteur quelconque $\overline{AB}$ porté par la droite

$\overline{bb'}$

3° Le rapport de l'accroissement de l'ordonnée à l'accroissement de l'abscisse lorsqu'on passe d'un point quelconque A à un autre point quelconque B de la droite (identique au rapport précédent).

$O'x'$, $O'y'$. Le second est défini par rapport au premier par la donnée :

1° Des coordonnées de la nouvelle (ou deuxième) origine O', soient x_0, , $\left(\text{ce sont encore les projections du vecteur } \overrightarrow{OO'}\right)$;

De l'angle

On cherche les relations entre les coordonnées (x, y), (x', y') d'un même point M par rapport aux deux systèmes d'axes, ou encore entre les projections (X, Y), (X', Y') d'un même vecteur $\vec{a}$. On exprime de préférence les anciennes coordonnées ou projections $(x, y; X, Y)$ en fonction des nouvelles $(x', y'; X', Y')$.

49. **Formules de transformation.** — En appelant toujours $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, $\left(\vec{i'}, \vec{j'}\right)$ les vecteurs unitaires portés par les axes, les données du problème se traduisent par les égalités vectorielles

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} &= x_0.\vec{i} + y_0.\vec{j}, \\ \vec{i'} &= \vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha, \\ \vec{j'} &= -\vec{i}.\sin\alpha + \vec{j}.\cos\alpha. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité s'obtient, suivant l'un des procédés indiqués au n° 45 pour obtenir une direction directement rectangulaire, par exemple,

$$\vec{j'} = \vec{k} \wedge \vec{i'} = \left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right)\cos\alpha + \left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right)\sin\alpha,$$

les parenthèses sont respectivement égales à $\vec{j}$ et $-\vec{i}$.

Ceci acquis, d'après la définition des coordonnées,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \left(x_0.\vec{i} + y_0.\vec{j}\right) + \left(x'.\right.$$

$$: + \vec{j}.\cos\alpha)$$

En groupant les termes en $\vec{i}$ et les termes en $\vec{j}$, on obtient

$$\overrightarrow{OM} = (x_0 + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\vec{i} + (y_0 + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\vec{j}.$$

l'axe directement perpendiculaire Oy s'appelle parfois le *système d'axes associé* au système polaire.

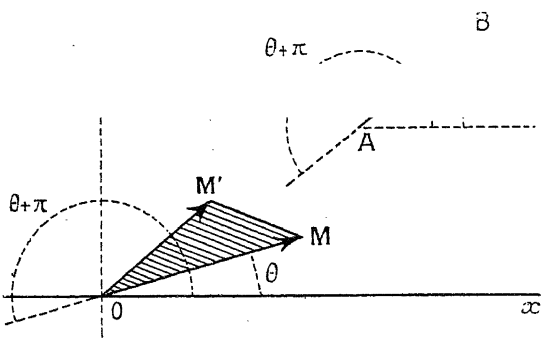
On peut définir le vecteur $\overrightarrow{AB}$, en choisissant un sens positif sur la droite qui le porte, soit $z'z$, et se donnant :

l'angle de Ox avec $z'z$,

la mesure de $\overrightarrow{AB}$ sur

A tout système de deux nombres ρ, θ correspond un seul vecteur, à une équipollence près; l'axe $z'z$ est en effet défini par l'angle θ et $\overrightarrow{AB}$ est ensuite défini par sa mesure ρ sur cet axe.

Fig. 30.



Mais, réciproquement, si l'on se donne un vecteur, il lui correspond une double infinité de systèmes (ρ, θ) donnés par les formules

$$\theta + 2k\pi, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta + \pi + 2k\pi, \\ -\rho. \end{array} \right.$$

On peut, en effet, choisir l'un des deux axes (de sens opposés) portant $\overrightarrow{AB}$ et à chacun d'eux correspond un des groupes de formules.

Soient (X, Y) les projections du vecteur considéré sur le système d'axes associé, les relations avec les coordonnées polaires (ρ, θ) sont

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que les trois nombres (α, β, γ) soient les cosinus directeurs d'une droite dirigée. En outre :

$$\beta = \vec{u}.\vec{j},$$

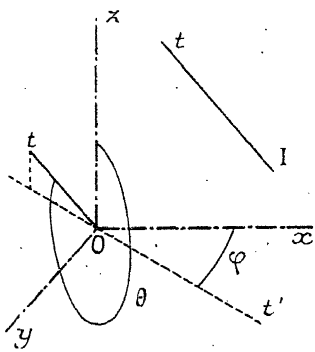
ou

$$\alpha = \cos(Ox, It), \qquad \gamma = \cos(Oz, It).$$

Ceci justifie le terme « cosinus » directeurs, mais ces cosinus ne se ramènent plus, comme en géométrie plane, au cosinus et au sinus d'un même angle; la relation entre les carrés des cosinus ne se traduit plus par une relation simple entre les angles.

37. **Angles polaires d'une droite dirigée.** — Pour déterminer une droite dirigée, on peut encore adopter deux angles convenablement définis : projetons l'axe Ot (parallèle à It, et de même sens) sur le plan Oxy, et sur la droite ainsi obtenue, prenons un sens positif

Fig. 32.



arbitraire Ot'. Le plan de Ot et Ot' étant le plan projetant, Ot contient Oz; nous y prendrons pour sens positif celui de Oz vers Ot'. Ceci posé, les angles

$$\varphi = (Ox, Ot'),$$
$$\theta = (Oz, Ot)$$

sont définis à des multiples de 2π près dans les plans orientés (Ox, Oy) et (Oz, Ot'). Ce sont les angles polaires de la droite

Parallélisme :

Perpendicularité :

$$pp' + qq' + rr' = 0.$$

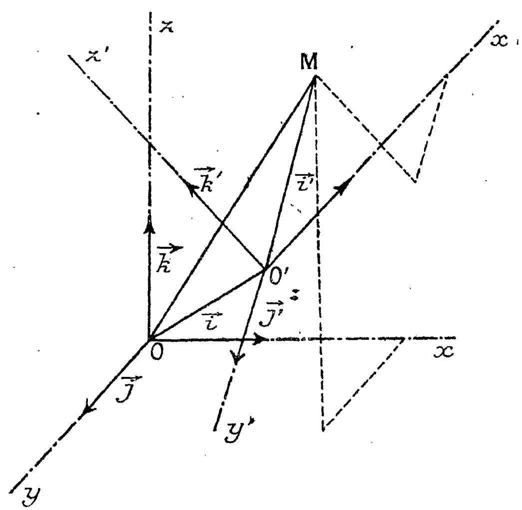
Enfin les cosinus directeurs d'un axe pris sur la droite ne sont définis qu'au signe près, et leurs valeurs sont données en fonction de p, q, r par

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} =$$

V. — CHANGEMENT D'AXES DANS L'ESPACE.

60. Énoncé du problème; tableau des neuf cosinus. — On se donne dans l'espace orienté deux systèmes d'axes trirectangles *directs* Ox, y, z — $O'x', y', z'$. Le second est défini par rapport au premier par la donnée :

Fig. 33.



1° Des coordonnées de la nouvelle (ou deuxième) origine O', soient ce sont encore les projections du vecteur $\overrightarrow{OO'}$).

produits mixtes (n° 32)

$$\vec{i}.(\vec{j}\wedge\vec{k}) = \vec{j}.(\vec{k}\wedge\vec{i}) = \vec{k}.(\vec{i}\wedge\vec{j}) = 1,$$

ou encore

Bien entendu, ces relations ne sont pas indépendantes, les six relations (A), par exemple, suffisent à exprimer que, Ox, Oy, Oz étant donnés, $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ forment un trièdre trirectangle, sans précision toutefois sur son sens. On doit donc pouvoir en déduire les six relations (B), puis les dix-huit autres, celles-là au signe près. C'est un problème d'algèbre qu'il ne convient pas de traiter ici.

62. Formules de transformation. — Les données du problème se traduisent par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{OO'} = x_0.\vec{i}$$

$$i' = \alpha.i + \beta.j$$

$$\vec{j'} = \alpha'.\vec{i} + $$

D'après la définition des coordonnées, on a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = (x_0.\vec{i} + y_0.\vec{j} + z_0.\vec{k}) +$$

En remplaçant $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ par leurs valeurs précédentes et ordonnant en $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, on obtient, comme coefficients, les valeurs de x, y, z (1):

$$z = z_0 + \gamma x' + \gamma'$$

(1) Le premier système de formules de transformation ainsi obtenu est encore valable en coordonnées obliques. Toutefois, les neuf coefficients n'étant plus des cosinus, les relations qui existent entre eux ne sont plus les mêmes; en particulier, on ne peut plus lire le tableau dans les deux sens, et les formules exprimant les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes ont des coefficients différents.

Pour les projections d'un vecteur, l'origine n'intervient plus :

$$X = \alpha X' + \alpha' Y' + \alpha'' Z',$$
$$Y = \beta X' + \beta' Y' + \beta'' Z',$$
$$Z = \gamma X' + \gamma' Y' + \gamma'' Z'.$$

Comme pour le plan, on peut chercher les expressions de x', y', z' en fonction de x, y, z. On a les mêmes coefficients, mais pris par colonnes au lieu d'être pris par lignes :

$$x' = \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) + \gamma\,(z - z_0),$$

63. Angles d'Euler. — Les neuf cosinus sont liés par six relations, que l'on peut montrer indépendantes ; il semble donc possible de les exprimer en fonctions de trois paramètres seulement. C'est ce qu'on réalise au moyen des angles d'Euler. Ces angles sont définis comme suit :

Soient toujours Ox, y, z un premier trièdre et $O'x', y', z'$ un second trièdre. On mène par O des axes parallèles (et de même sens) aux axes du second trièdre, soient Ox', Oy', Oz'. On prend l'intersection des plans Oxy, $Ox'y'$, que l'on appelle *ligne des nœuds ;* cette ligne est perpendiculaire au plan Ozz' ; on adopte sur elle un sens positif arbitraire, soit $\overrightarrow{OI}$ le vecteur unitaire ; il en résulte un sens positif de rotation dans le plan perpendiculaire Ozz' (¹).

Par ailleurs, chacun des plans Oxy, $Ox'y'$ est orienté ; on définit alors les angles d'Euler, dans ces trois plans orientés, à un multiple de 2π près :

$\psi = (Ox, OI)$	*précession*,
$\theta = (Oz, Oz')$	*nutation*,
$\varphi = (OI, Ox')$	*rotation propre* (²).

(¹) Sur la figure les trièdres sont pris dans le sens de l'analytique, le plan Ozz' est le plan de figure ; OI est pris en avant, le sens résultant dans le plan de figure est celui des aiguilles d'une montre.

(²) Ces angles ont été introduits dans un problème d'Astronomie : l'*étude du mouvement de la Terre,* ce qui explique leurs dénominations ; $Ox'y'$ représente le plan de l'équateur, Oz' la ligne des pôles (sud-nord) ; Oxy le plan de l'écliptique ; le sens positif sur la ligne des nœuds (intersection de l'équateur et de l'écliptique) va

64. **Formules d'Euler.** — Pour trouver les expressions de $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$, nous passerons par l'intermédiaire des vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OJ'}$. On voit immédiatement que :

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}\,.\cos\psi + \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OJ} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{j}\,.\cos\psi - \vec{i}$$

$$\overrightarrow{OJ'} = \overrightarrow{OJ}.\cos\theta + \vec{k}\,.\sin\theta,$$

$$\vec{k'} = \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ'} = \vec{k}.\cos\theta - \overrightarrow{OJ}\,.\sin\theta,$$

$$\vec{i'} = \overrightarrow{OI}.\cos\varphi + \overrightarrow{OJ'}.\sin\varphi,$$

$$\vec{j'} = \vec{k'} \wedge \vec{i'} = \overrightarrow{OJ'}.\cos\varphi - \overrightarrow{OI}\,.\sin\varphi.$$

En éliminant les vecteurs OI, $\vec{J'}$, on obtient les expressions de $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$:

$$\vec{i'} = \left(\vec{i}\cos\psi + \vec{j}\sin\psi\right)\cos\varphi + \left[\left(\vec{j}\cos\psi - \vec{i}\sin\psi\right)\cos\theta + \vec{k}\,\text{si}\right.$$

$$j' = -\left(i\cos\psi + \vec{j}\sin\psi\right)\sin\varphi + \left[\left(\vec{j}\cos\psi - \vec{i}\sin\psi\right)\cos\theta + \vec{k}\sin\theta\right]\cos\varphi,$$

$$\vec{k'} = \vec{k}\cos\theta - \left(\vec{j}\cos\psi - \vec{i}\sin\psi\right)\sin\theta.$$

En ordonnant et prenant les coefficients de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, on obtient le tableau des neuf cosinus :

$\vec{i'}$...	$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta$	$\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta$	$\sin\varphi\sin\theta$
$\vec{j'}$...	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta$	$\cos\varphi\sin\theta$
$\vec{k'}$...	$\sin\psi\sin\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

Comme suite aux remarques faites, on peut voir que les termes de ce tableau ne changent pas si l'on remplace θ, ψ, φ par $-\theta$, $\psi + \pi$, $\varphi + \pi$.

De même si l'on fait $\theta = 0$, les termes du tableau se réduisent aux cosinus et sinus de $(\psi + \varphi)$.

Enfin échangeons les rôles des deux trièdres (sans changer le sens

quelconque du plan, et q la projection de Q sur (D), le premier membre de l'équation (1') est égal à

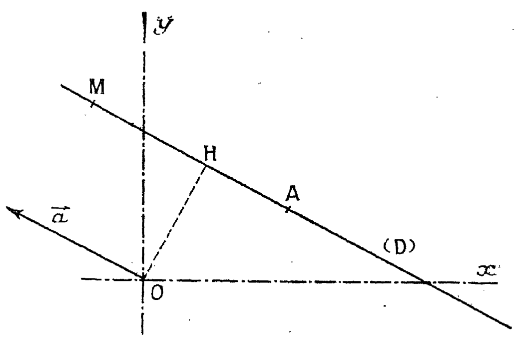
$$ux + vy + w = \vec{n}.\overrightarrow{OQ} - \vec{n}.\overrightarrow{OH} = \vec{n}.\overrightarrow{HQ},$$

ce qui s'écrit encore

en remarquant que $\overline{qQ}$ est la projection de $\overrightarrow{HQ}$ sur $\vec{n}$. Le premier membre de cette égalité, $\overline{qQ}$, est *la distance de* Q *à la droite* (D), mesurée sur la direction positive de $\vec{n}$, en allant de la droite vers le point.

68. **Méthode du produit extérieur.** — 1° Soient une droite (D), passant par un point A, de coordonnées (x_0, y_0), et un vecteur $\vec{a}$, de

Fig. 36.



projections (p, q), *parallèle* à (D),

$$\overrightarrow{OA} = x_0.\vec{i}$$
$$\vec{a} = p.\vec{i} + q.\vec{j}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit sur (D) est que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ vérifie l'équation vectorielle

(II) $\qquad \vec{a} \wedge$

ou encore l'équation cartésienne

de la forme

$$ux + vy + w = 0,$$

en posant

$$u = q, \qquad v = -p. \qquad w$$

2° Soit, réciproquement, une équation du premier degré

$$ux + vy + w = 0 \qquad (u \text{ ou } v \text{ non nul});$$

le lieu des points M, dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation, est identique au lieu des points M vérifiant l'équation

$$\vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = w.\vec{k}, \qquad \vec{a} = -v.\vec{i} + u.\vec{j};$$

c'est par suite la droite (D), parallèle à $\vec{a}$, et passant par le point H défini comme suit :

On mène Ot, directement perpendiculaire à $\vec{a}$, et sur cette droite on prend H défini par la mesure $\overline{OH}$:

$$\overline{OH}.\,|\vec{a}| = w \qquad \text{ou encore} \qquad \overline{OH} = \frac{}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Remarquons encore que l'on aurait pu écrire la proportionnalité des projections de $\vec{a}$ et de $\overrightarrow{AM}$:

équation évidemment équivalente à (II'). Si l'on suppose p non nul, en introduisant le *coefficient angulaire* m, quotient de q par p (n° 46), on obtient la forme bien connue

La deuxième partie du théorème a déjà été traitée sous le nom de « division géométrique » (n° 30). On peut encore écrire l'expression de $\overrightarrow{OH}$ sous forme vectorielle (n° 35)

VII. — ÉQUATION D'UN PLAN ET ÉQUATIONS D'UNE DROITE.

71. Équations linéaires à trois variables. — On considère l'espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz; on désigne toujours par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires sur les axes et x, y, z les coordonnées d'un point M. Les deux problèmes énoncés au n° 65 conduisent, pour le cas d'un plan, au double énoncé, généralisation immédiate de l'énoncé relatif à la droite dans le plan (n° 66) :

Un plan (P) *peut être représenté par une équation linéaire en*

et, réciproquement, toute équation linéaire en x, y, z de cette forme représente un plan.

Pour le cas d'une droite, on a l'énoncé :

Une droite (D) *peut être représentée par un système de deux équations linéaires, distinctes et compatibles ; et, réciproquement, un tel système de deux équations représente une droite.*

Nous allons établir l'équation du plan dans toute sa généralité. Nous n'établirons qu'un cas particulier des équations de la droite ; l'énoncé général relèverait plutôt de la théorie des équations linéaires que de celle des vecteurs.

72. Équation d'un plan. — 1° Soient un plan (P) passant par un point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0), et un vecteur $\vec{n}$ de projections (u, v, w) *perpendiculaire* au plan (P) :

$$\overrightarrow{OA} = x_0$$

$$n =$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit dans (P) est que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ vérifie l'équation vectorielle

(I,) $$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = \vec{n}.\overrightarrow{OA},$$

ou encore l'équation cartésienne du premier degré

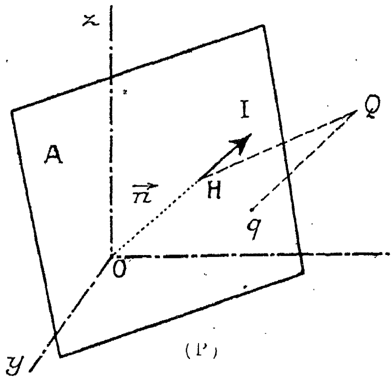
$$(\mathrm{I}'_c) \qquad ux + vy + wz + s = 0$$

obtenue en remarquant que

$$n.\mathrm{OM} = ux \cdot$$

et en posant

Fig. 38.



2° Soit, réciproquement, une équation du premier degré

$$ux + vy + wz + s = 0 \qquad (u \text{ ou } v \text{ ou } w \text{ non nul});$$

le lieu des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient cette équation est identique au lieu des points M vérifiant l'équation vectorielle

$$\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{OM}} + s = 0;$$

c'est, par suite, le plan (P) perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$, et passant par le point H défini comme suit :

on mène $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ équipollent à $\vec{n}$ et, sur la droite qui le porte, on prend le point H défini par

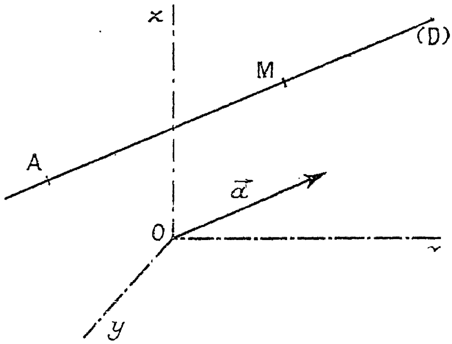
$$\vec{\mathrm{I}}$$

On peut encore ajouter que si x, y, z sont les coordonnées d'un point Q quelconque de l'espace, et q la projection de Q sur le

projections (p, q, r), *parallèle* à (D),

$$\overrightarrow{OA} = x_0 . \vec{i} + y_0 . \vec{j} + z_0 . \vec{k},$$
$$\vec{a} = p . \vec{i} + q . \vec{j} + r . \vec{k}.$$

Fig. 39.



La condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit sur (D) est que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ vérifie l'équation vectorielle

$$(\text{II}_e) \qquad \vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{a} \wedge \overrightarrow{OA},$$

ou encore le système d'équations cartésiennes

$$(\text{II}'_e) \qquad \begin{aligned} qz - ry &= qz_0 - ry_0 \\ rx - pz &= rx_0 - pz_0 \end{aligned}$$

équations qui sont de la forme

$$rx - pz = m,$$
$$py - qx = n,$$

avec la condition

2° Soit, réciproquement, un tel système d'équations, p, q, r et l, m, n vérifiant la condition imposée, et p, q, r n'étant pas tous nuls. Le lieu des points M dont les coordonnées vérifient ces équa-

le lieu du point M est évidemment la droite parallèle au vecteur $\vec{a}$ et passant par le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{b}$.

cation : longueur de la perpendiculaire commune à deux
— Considérons deux droites (D) et (D′) données sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = \vec{b} + \lambda\vec{a}, \qquad \overrightarrow{OM'} = \vec{b'} + \lambda'\vec{a'},$$

et supposons qu'elles ne soient pas parallèles : $\vec{a} \wedge \vec{a'} \neq 0$. Si le vecteur

$$\overrightarrow{M'} = \vec{b'} - \vec{b} + \lambda'\vec{a'} - \lambda\vec{a}$$

est simultanément perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{a'}$, MM′ est *la perpendiculaire commune* à (D) et (D′) et sa longueur d est *la plus courte distance* de ces droites; lorsqu'il en est ainsi on a évidemment

$$\frac{\vec{a} \wedge \vec{a'}}{\vec{a} \wedge \vec{a'}\,|}$$

ε étant égal à +1 ou −1 selon que les sens des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{a} \wedge \vec{a'}$ coïncident ou non. Faisons le produit intérieur par le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{a'}$ des deux membres de l'équation

$$\vec{b'} - \vec{b} + \lambda'\vec{a'} - \lambda\vec{a} \quad \varepsilon d\,\frac{\vec{a} \wedge \vec{a'}}{\left|\vec{a} \wedge \vec{a'}\right|}$$

En tenant compte de ce que

$$\vec{a'}.(\vec{a} \wedge \vec{a'}) = 0, \qquad \vec{a}.(\vec{a} \wedge \vec{a'}) = 0, \qquad (\vec{a} \wedge \quad ^2 = \left|\vec{a} \wedge \vec{a'}\right|^2,$$

nous obtenons

78. **Fonction homographique.** — Soit une droite (D) définie, cette fois, par deux points A et B et prenons comme paramètre ρ le rapport

83. Fonction dérivée. Dérivées successives. — La dérivée est ainsi définie et interprétée pour une valeur t_0 de la variable. Nous ne considérerons que des fonctions vectorielles « usuelles », admettant des vecteurs dérivés pour toutes les valeurs de certains intervalles et par suite continues pour toutes ces valeurs. Dans ces conditions le vecteur dérivé devient à son tour une fonction de la variable t : c'est la *fonction dérivée*. La dérivée de cette nouvelle fonction est encore appelée dérivée seconde, la dérivée de la dérivée seconde est la dérivée troisième, et ainsi de suite. On emploie les mêmes notations que pour les fonctions scalaires :

$$\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}, \quad \frac{d^3\vec{a}}{dt^3}, \quad \ldots; \quad a''_{t}, \quad a'''_{t^3}, \quad \ldots; \quad a''(t), \quad a'''(t), \quad \ldots.$$

84. Changement de variable dans la dérivée première. — Si l'on considère un vecteur fonction d'une variable t et une fonction scalaire $\theta(t)$, on peut prendre θ pour nouvelle variable, dans un intervalle où la fonction inverse, t fonction de θ, est définie et uniforme. Supposons dans ce même intervalle la dérivée de θ par rapport à t définie et non nulle, il en est de même de la dérivée de t par rapport à θ qui est l'inverse de la précédente. La dérivée du vecteur $\vec{a}$, par rapport à la variable θ, s'obtient par la même règle des fonctions de fonctions que dans le cas des fonctions scalaires :

$$\overrightarrow{da} \qquad \overrightarrow{da} \;\; dt$$

Seulement, dans ce cas, les facteurs du second membre sont l'un scalaire, l'autre vectoriel. On voit qu'*un changement de variable ne change pas la ligne d'action du vecteur dérivé*, mais seulement sa mesure sur cette ligne d'action orientée (c'est-à-dire encore son module et peut-être son sens).

La démonstration de cette propriété est aussi immédiate que pour les fonctions scalaires. Il suffit d'écrire le rapport dont on cherche la limite sous forme d'un produit :

$$\vec{a}(t) - \vec{a}(\qquad\qquad t - t_0$$

Deux systèmes de différentielles sont proportionnels; car si, dans la relation de définition, on donne deux valeurs λ, λ' au facteur scalaire arbitraire, le deuxième système se déduit du premier en multipliant tous ses éléments par le même facteur scalaire $\lambda'' = \lambda' : \lambda$. Réciproquement, si l'on multiplie un système de différentielles, correspondant par exemple à λ par un même scalaire λ'', on obtient un nouveau système de différentielles correspondant au facteur scalaire $\lambda' = \lambda . \lambda''$. Enfin les dérivées des fonctions, par rapport à une nouvelle variable θ, constituent toujours un système de différentielles. On passe en effet des dérivées par rapport à t aux dérivées par rapport à θ en les multipliant par le même scalaire $\frac{dt}{d\theta}$ supposé fini et non nul. On peut résumer ces diverses propriétés en disant : *que les systèmes de différentielles ne sont définis qu'à un facteur* (*scalaire*) *près de proportionnalité et que leur ensemble est indépendant de la variable scalaire considérée.*

Comme conséquence, on voit que la notation de Leibniz pour désigner une dérivée

$$\frac{d\vec{a}}{dt}$$

peut être considérée comme représentant le quotient de la différentielle $d\vec{a}$ par la différentielle dt (la première vectorielle, la seconde scalaire). D'une façon plus générale étant donné un système de différentielles de plusieurs fonctions vectorielles et scalaires

$$d\vec{a},\quad d\vec{b},\quad \ldots,\quad df,\quad dg,\quad \ldots,$$

les quotients de ces différentielles par la différentielle df d'un des scalaires, supposée non nulle, sont les dérivées des diverses fonctions envisagées par rapport à la fonction f prise comme variable indépendante. On ne peut pas naturellement diviser par la différentielle d'un des vecteurs.

86. **Calcul des dérivées et différentielles premières.** — Les règles de dérivation des fonctions vectorielles sont analogues aux règles de dérivation des fonctions scalaires. Elles sont résumées dans les formules ci-après; comme il s'agit de fonctions simultanées et de fonctions construites à partir de celles-là, on a adopté la notation

88. **Différentielles d'ordre supérieur.** — On désigne par différentielles premières, secondes, troisièmes, etc. d'un système de fonctions simultanées, vectorielles et scalaires, des vecteurs et des scalaires proportionnels aux dérivées premières, secondes, troisièmes, etc. de ces fonctions, les coefficients de proportionnalité étant respectivement λ, λ^2, λ^3, ... :

$$d^2\vec{b} = \lambda^2 . \vec{b}''_{t^2},$$

$$\longrightarrow \qquad \vec{b}'''_{t^3}$$

Deux systèmes de différentielles sont encore proportionnels et réciproquement, le coefficient de proportionnalité étant toutefois élevé au carré pour les dérivées secondes, au cube pour les dérivées troisièmes, etc. *L'ensemble des systèmes de différentielles n'est plus indépendant de la variable envisagée*, comme il résulte des formules précédentes de changement de variable.

Mais certaines combinaisons de ces différentielles sont seulement multipliées par un facteur de proportionnalité dans un changement de variable; ce sont ces expressions qui s'introduisent effectivement dans les calculs.

Considérons les combinaisons suivantes de différentielles premières et secondes :

$$\vec{da} \wedge d^2 a; \qquad df \quad dg$$

Ces expressions sont définies, au facteur λ^3 près, c'est-à-dire que leur quotient par le cube d'une différentielle première d'un scalaire $(df)^3$ est invariant. *En ce sens elles sont indépendantes d'un changement de variable* [1].

[1] Cette propriété montre que l'emploi des différentielles secondes est plus commode pour les fonctions vectorielles que pour les fonctions scalaires. Pour ces dernières, il convient d'employer deux fonctions simultanées au moins et de constituer un déterminant qui n'est, en réalité, qu'une composante d'un certain produit extérieur.

Effectivement, il suffit de remplacer dans chacune d'elles les différentielles par les dérivées premières et secondes par rapport à θ, et de les exprimer en fonction des dérivées par rapport à t, on obtient

Les deux expressions sont bien multipliées par le même coefficient que celui qui fait passer de $(f'_t)^3$ à $(f'_\theta)^3$.

Dans la seconde expression on peut remplacer un des scalaires f et g ou même tous les deux par des vecteurs; dans ce dernier cas on peut considérer les produits indiqués comme intérieurs ou extérieurs; si l'on emploie ces derniers, il y a lieu de tenir compte de l'ordre des facteurs. On obtient ainsi les trois expressions invariantes (¹) :

$$\overrightarrow{da}.\overrightarrow{d^2b} \quad \overrightarrow{d^2a}.\overrightarrow{db}; \qquad \overrightarrow{da} \wedge \overrightarrow{d^2b} - \qquad \wedge \overrightarrow{db}.$$

En passant aux différentielles troisièmes, on obtient une expression dont le quotient par $(df)^6$ est invariant et qu'on peut considérer en ce sens comme indépendante d'un changement de variable, *en formant le produit mixte des différentielles première, seconde et troisième, d'une fonction vectorielle :*

$$\wedge d^3a) = \overrightarrow{d^3a}.(da \wedge d^2a) = d^2a.(\overrightarrow{d^3a} \wedge \overrightarrow{da}).$$

Pour le vérifier, il suffit de remplacer ces différentielles par les dérivées

(¹) La notation de Leibniz pour la dérivée seconde :

$$\frac{\overrightarrow{d^2a}}{dt^2}, \qquad \frac{d^2f}{dt^2},$$

devrait, en réalité, s'écrire, pour représenter un quotient indépendant de la variable adoptée :

$$\overrightarrow{d^2a}.dt - \overrightarrow{da}.d^2t \qquad \frac{d^2f.dt - df.d^2t}{}.$$

En outre le sens Mt qui, sur la tangente, prolonge le sens des arcs, fait avec le rayon un angle $+\frac{\pi}{2}$ (*voir* la figure), de sorte que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$ parallèle à la tangente et de mesure $+\mathrm{R}$ sur Mt se déduit de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$; il est donc égal à $\vec{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}$, en désignant toujours par $\vec{k}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire au plan (n° 28). Enfin le vecteur dérivé est parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$, et leur rapport est la dérivée de θ. En résumé et en remarquant que le résultat est indépendant de la variable t :

Si, dans un plan fixe orienté, un vecteur $\vec{a}$ a un module constant et fait un angle θ variable avec une certaine direction $\mathrm{O}x$ fixe, la différentielle du vecteur est donnée en fonction de celle de l'angle par la relation

92. Projections des dérivées. — Adoptons les notations de la fin du n° 80 et soit $\alpha(t)$ la mesure de la projection du vecteur $\vec{a}(t)$ sur un axe fixe de vecteur unitaire $\vec{u}$, en sorte que

$$\alpha(t) = \vec{u}.\vec{a}(t).$$

En prenant les dérivées successives des deux membres de cette égalité, on obtient la suite d'égalités

de sorte que : *les dérivées successives de la projection d'un vecteur sur un axe fixe sont les projections des dérivées successives de ce vecteur.*

Ceci s'applique notamment aux projections ou composantes d'un vecteur variable par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires fixes, de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. La dérivée d'ordre n du vecteur a ainsi pour composantes les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des composantes;

on retrouve cette propriété en dérivant n fois l'égalité

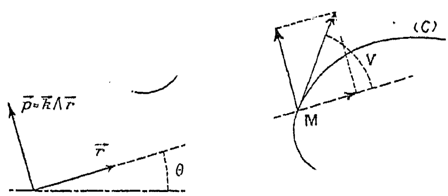
$$\vec{a} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}$$

qui donne, d'après le n° 86,

Le théorème de Rolle ne s'étend pas à une fonction vectorielle, mais on peut l'appliquer à la projection de cette fonction sur un axe fixe, qui est une fonction scalaire. En passant par cet intermédiaire on peut étendre aux fonctions vectorielles certaines conséquences du théorème de Rolle, notamment la formule de Taylor et les relations entre les fonctions primitives.

93. Dérivées première et seconde en coordonnées polaires. — Soit un plan orienté, rapporté à un pôle O et un axe polaire Ox; considérons dans ce plan un vecteur variable $\vec{a}$, défini par ses composantes

Fig. 42.



polaires ρ et θ (n° 50). Appelons $\vec{r}$ le vecteur unitaire sur la demi-droite d'angle polaire θ. De la définition de $\vec{r}$, il résulte que

$$\vec{r}) = 0.$$

D'autre part, le vecteur $\vec{a}$ s'exprime en fonction de $\vec{r}$ et ρ par

$$\vec{a} = \rho.\vec{r}.$$

En différentiant ce produit d'un vecteur par un scalaire, on obtient

$$da = r.d\rho + \rho.dr.$$

Ce résultat est indépendant de la variable adoptée, mais suppose naturellement qu'on dérive par rapport à la même variable les trois fonctions simultanées $\vec{a}$, ρ, θ (¹).

94. **Formule de Taylor.** — Considérons une fonction vectorielle $\vec{a}(t)$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n au voisinage de la valeur $t = t_0$ [c'est-à-dire dans un certain intervalle $(t_0 - h, t_0 + h)$], et telle en outre que la dérivée $n^{\text{ième}}$ soit continue dans ce même voisinage; on peut toujours écrire l'égalité

$$= \vec{a}(t_0)\cdot$$

Nous allons montrer que *le vecteur* $\vec{\varepsilon}(t)$ *ainsi défini tend vers* o *lorsque t tend vers* t_0.

Pour cela, il suffit d'établir qu'il en est ainsi de sa projection sur un axe quelconque de vecteur unitaire $\vec{u}$. Or en formant le produit intérieur par le vecteur $\vec{u}$ des deux membres de l'égalité précédente, on obtient dans le premier membre la projection de $\vec{a}$ sur l'axe

$$\alpha(t) = \vec{u}.\vec{a}(t),$$

et dans le second membre (jusqu'au dernier terme exclu), la valeur pour $t = t_0$ de cette projection et de ses dérivées successives. On a

(¹) Il n'est pas sans intérêt d'observer l'effet d'un changement de variable; quand on passe de la variable t à la variable τ on a, d'après le n° 87 :

$$\vec{a}''_{\tau^2} = \vec{a}''_{t^2}(t')^2 - \vec{}$$

Donc dans le changement le vecteur et ses composantes sont d'une part multipliés par $(t')^2$ et d'autre part s'accroissent de quantités qui se compensent en vertu de l'égalité

$$\vec{t} = \vec{r}\rho\vec{t}$$

données rectangulaires et comme le module du vecteur $(t-t_0)^n.\vec{\varepsilon}(t)$ est au plus égal à la somme des modules de ses composantes, ou projections, sur trois axes donnés (n° 8), on obtient l'inégalité annoncée contenant le facteur 3.

Étant donnée une fonction vectorielle $\vec{a}(t)$, si l'on a pu obtenir par un certain procédé un développement de la forme

$$\vec{A}_2.(t-t_0)^2+\ldots+\vec{A}_n.(t-t_0)^n+(t-t_0)^n.\vec{\varepsilon}($$

$\vec{\varepsilon}(t)$ étant un vecteur infiniment petit en même temps que $t-t_0$, les coefficients vectoriels de ce développement sont bien déterminés comme étant des limites pour $t=t_0$:

$$\vec{A}_0 = \text{limite}\,\vec{a}(t),$$

$$\vec{A}_1 = \text{limite}\,\frac{1}{t-t_0}\left[\vec{a}(t)-\vec{A}_0\right],$$

$$\vec{A}_n = \text{limite}$$

L'existence de ces limites résulte du développement lui-même. Les coefficients sont donc uniques; ils sont notamment égaux aux valeurs données par la formule de Taylor, lorsque la fonction admet des dérivées successives.

Il résulte encore de cette unicité qu'on peut faire sur les développements certaines opérations : somme, produits intérieur ou extérieur, ou encore produit par un développement scalaire; dérivation, intégration, ... Il suffit de les considérer comme des sommes et dans la simplification et la mise en facteur des puissances de $(t-t_0)$ de s'arrêter au dernier terme qui ne renferme pas d'infiniment petit non précisé $\vec{\varepsilon}(t)$. On peut aussi dans un développement substituer à $t-t_0$ son développement par rapport à une variable θ infiniment petite simultanée; on en déduit le développement par rapport à θ; c'est encore un moyen d'obtenir les dérivées successives de $\vec{a}(t)$ par rapport à la nouvelle variable, dont un calcul a été amorcé au n° 87.

Toutes ces considérations sont analogues aux considérations bien

ment ($d\rho$, $\rho . d\theta$). On désigne ordinairement par V (voir *fig.* 42) l'angle, défini à un multiple de π près, de la droite OM avec la tangente non dirigée. La tangente de cet angle est le quotient des composantes précédentes de $d\left(\overrightarrow{OM}\right)$. Donc

Par ailleurs le module de étant égal à ds, on a aussi

99. **Courbure d'une courbe plane.** — Sur une courbe plane (C), prenons comme paramètre l'arc $\widehat{IM} = s$; la dérivée $\frac{d\vec{u}}{ds}$ du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{ds}$ est un vecteur normal à $\vec{u}$ (n° 91), donc *normal à la courbe*. Par définition :

Le sens du vecteur $\frac{d\vec{u}}{ds}$ *est le sens de la courbure sur la normale à la courbe au point considéré; le module de ce vecteur est la courbure en ce point et l'inverse de cette courbure est le rayon de courbure* R.

De sorte qu'en désignant par $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la courbe dans le sens de la courbure on a

$$\overline{ds^2} \qquad \text{R positif.}$$

Le sens de la courbure ainsi défini est indépendant du sens des arcs, adopté sur la courbe, et coïncide en chaque point avec le *sens de la concavité* de la courbe [1]. Il suffit de considérer les deux cas

[1] Nous rattachons ici la notion de « concavité » au sens de variation de l'inclinaison de la tangente : considérons (*fig.* 43) sur une courbe un point déterminé A; un point M se déplaçant au voisinage de A, de part et d'autre et la demi-tangente Mt prolongeant le sens AM; menons par A la parallèle At à Mt. Si dans le déplacement de M

d'un angle par longueur, c'est bien, en dimensions, l'inverse d'une longueur. On appelle que ... σ *l'angle de contingence;* c'est la différentielle de l'an... tangente à la courbe au point variable M.

d $\frac{d\sigma}{}$

sens ... de variation de u

sur ... droit $(\vec{u}, \vec{n})$ es...

$\vec{}$ ...stant, soit par exemple ...

. En se reportant à l'expression de $\vec{u}$, on en déduit :

u_0 |

l'intégration est immédiate :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}_0 . s + \vec{v}_0 \qquad (\vec{u}_0, \vec{v}_0 \text{ vecteurs fixes});$$

l'arc de courbe est donc nécessairement une droite (n° 77).

Donc, à l'exception de la droite, la définition du sens de courbure et du rayon de courbure est valable, sauf pour des points « particuliers » de la courbe. Nous reviendrons plus loin (n° 105) sur l'étude de ces points particuliers, ainsi que de ceux où le vecteur $\vec{u}$ lui-même (c'est-à-dire encore l'arc s) ne serait plus défini (n° 106). Nous allons d'abord nous occuper d'arcs de courbes ne renfermant aucun de ces points particuliers.

100. Trièdre de Frenet. — Le plan étant orienté, désignons toujours par $\vec{k}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire (n° 28); soit d'autre part ε un nombre égal à $+1$ ou -1 suivant que l'angle droit $(\vec{u}, \vec{n})$ est positif ou négatif. D'après ce qui précède, ε a le

courbe (C) définie paramétriquement, mais n'explicitons pas le paramètre. En employant toujours les notations précédentes, on a

Différentions à nouveau

soit encore, en remplaçant $\overrightarrow{du}$ par sa valeur donnée au numéro cédent,

$$(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \vec{u}.d^2s + \vec{n}.\frac{1}{R}.(ds)^2$$

Formons le produit extérieur de ces deux différentielles (expression invariante signalée au n° 88); dans le produit des seconds membres, le coefficient de d^2s est nul et il reste

On peut introduire la notion de « mesure d'un produit extérieur de deux vecteurs dans un plan orienté », qui a été définie au n° 28; c'est le rapport de ce produit extérieur au vecteur unitaire $\vec{k}$. L'égalité devient ainsi

$$\text{mesure}\left[d(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) \wedge d^2(\overrightarrow{\mathrm{OM}})\right] = \varepsilon.\frac{1}{R}.(ds)^3.$$

Pour avoir la valeur de R, il suffit de prendre les modules des deux membres de la première égalité ou les valeurs absolues des deux membres de la seconde, d'où

$$R = \quad \left| d(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) \right.$$

On peut naturellement, dans cette expression, remplacer les différentielles par des dérivées première et seconde par rapport à un paramètre quelconque. Les résultats du n° 88 montrent que l'expression est bien invariante ([1]).

dant à A, la fonction $\vec{a}(t)$ *admet indéfiniment des dérivées qui sont par suite continues* (¹), puisque chacune d'elles a une fonc-

dérivée. [Il est possible que cette condition ne soit pas re

un certain paramètre, mais qu'elle le devienne après un

(après changement de paramètre [illegible]) a

suivant les puissances de $(t - t_0)$ (n° 94). Pour simp

nous supposerons $t_0 = 0$; d'ailleurs on se ramène toujours à ce cas en prenant comme paramètre $\theta = t - t_0$, ce qui ne change pas les valeurs des dérivées successives pour $t = t_0$ ou $\theta = 0$. On a alors

$$) = a_0 \qquad\qquad p!$$

Par abréviation, on a écrit $\overrightarrow{a_0^{(i)}}$ pour $\overrightarrow{a^{(i)}}(0)$, valeur de la dérivée d'ordre i pour $t = 0$. La fonction vectorielle $\vec{\varepsilon}(t)$ est infiniment petite avec t, et, d'après les hypothèses faites, elle est aussi indéfiniment dérivable au voisinage de $t = 0$.

Ceci posé, on dit que : *le point* A *est « simple » ou du premier ordre sur la branche de courbe, si la première dérivée est un vecteur non nul* (²), pour $t = 0$ et par suite aussi au voisinage de 0.

Au voisinage d'un point simple, on peut définir la longueur s d'un arc de courbe sur (C). Effectivement, limitons le développement de $\overrightarrow{OM}$ aux deux premiers termes et dérivons par rapport à t, on trouve

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}_0 + t.\vec{a}'_0 + t.\vec{\varepsilon}(t),$$

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \vec{a}'_0 + \vec{\varepsilon}(t) + t.\vec{\varepsilon}'(t) = \vec{a}'_0 + \vec{\varepsilon}_1(t)$$

(¹) Cette condition est notamment vérifiée pour tout point d'une *courbe algébrique* [*voir*, par exemple, la *Théorie des fonctions algébriques* de MM. Appell et Goursat, Chap. IV (G.-V.)].

On pourrait d'ailleurs adopter des conditions moins restrictives pour un certain nombre de définitions et résultats donnés dans ce numéro et le suivant.

(²) Cette définition n'exclut pas le cas d'un point multiple A où se croisent plusieurs branches d'une même courbe (C). Il suffit d'étudier séparément chacune des branches qu'on appelle encore, suivant une locution de Halphen, des « cycles ». [Note de Halphen sur les Points singuliers dans la *Géométrie analytique* de Salmon (Courbes planes), traduite par Chemin (G.-V.).]

En appliquant d'autre part la formule du n° 101, on trouve

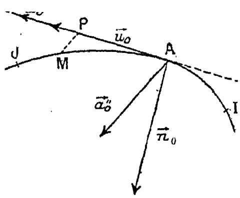
$$\overrightarrow{a'_0} \wedge \overrightarrow{a''_0} = \left[\overrightarrow{u_0} \wedge \overrightarrow{n_0}\right] \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)_0^3 = \left[\overrightarrow{u_0} \wedge \overrightarrow{n_0}\right] \frac{1}{R}$$

Il en résulte que, si les vecteurs $\overrightarrow{a'_0}$, $\overrightarrow{a''_0}$ *ne sont pas parallèles* (produit extérieur non nul) *la courbure n'est pas nulle*, le vecteur unitaire $\overrightarrow{n_0}$ est déterminé; il y a au point A un sens de la courbure et un rayon de courbure. On dit que le *point* A *est « ordinaire »*.

Nous allons vérifier que : *dans le cas d'un point simple à courbure non nulle, le sens de la courbure coïncide bien avec le sens de la concavité* (défini par la position de la courbe par rapport à sa tangente, et non plus comme au n° 99 par le sens de variation de la tangente).

D'après l'hypothèse sur le sens des s, $\overrightarrow{a'_0}$ et $\overrightarrow{u_0}$ sont des vecteurs

Fig. 45.



parallèles et de même sens; il en est de même des produits extérieurs $\left(\overrightarrow{a'_0} \wedge \overrightarrow{a''_0}\right)$, $\left(\overrightarrow{u_0} \wedge \overrightarrow{n_0}\right)$. Donc $\overrightarrow{a''_0}$ et $\overrightarrow{n_0}$ sont dirigés vers la même région du plan par rapport à la direction de $\overrightarrow{a'_0}$ ou $\overrightarrow{u_0}$ [les sinus des angles $\left(\overrightarrow{a'_0}, \overrightarrow{a''_0}\right)$, $\left(\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{n_0}\right)$ doivent être de même signe; *voir* la figure 45]. Cherchons la position de la courbe par rapport à sa tangente. Si l'on pose

le lieu de P quand t reste voisin de o est une portion de la tangente à la courbe. On obtient un point M de (C) en ajoutant à $\overrightarrow{OP}$ le

vecteur $\overrightarrow{PM}$ défini par l'égalité

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2!}\, t^2 . \overrightarrow{a''_0} + t^2 . \vec{\varepsilon}(t).$$

Pour t suffisamment petit, ce vecteur fait avec $\overrightarrow{a''_0}$ un angle voisin de o, il est par suite dirigé, par rapport à la tangente, vers la même région du plan que $\overrightarrow{a''_0}$ et $\vec{n}_0$ (à condition toutefois, ce qui a été supposé, que l'angle de $\overrightarrow{a''_0}$ avec la tangente ne soit pas nul). C'est dire que, de part et d'autre de A et au voisinage (qui peut être pratiquement très petit), *la courbe lieu de* M *est du même côté de sa tangente que le vecteur* $\vec{n}_0$.

Enfin, en un point simple A, t étant développable en fonction de s, on peut aussi développer $\overrightarrow{OM}$ et par suite $\vec{u}$ et $\vec{n}$ en fonction de s. Les premiers coefficients ont des valeurs simples qui résultent immédiatement de l'expression des dérivées de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ (n° 100) (*voir* pour un calcul analogue le n° 128), ce sont

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \vec{u}_0 s + \vec{n}_0 \frac{1}{2R_0} s^2 - \left(u_0 \frac{1}{R_0^2} + n_0 \frac{R'_0}{R_0^2} \right) \frac{s^3}{6}$$

$$\frac{1}{R_0} s - \Big(\vec{u}_0 \frac{1}{R_0^2}$$

R'_0 désigne naturellement la dérivée de R, fonction de s, pour $s = 0$.

105. Point d'inflexion. — Si, en un point simple A de (C), la dérivée seconde est nulle ou si les dérivées première et seconde de $(\overrightarrow{OM})$ sont parallèles, c'est-à-dire si, avec les notations du numéro précédent,

$$\overrightarrow{a'_0} \wedge \overrightarrow{a''_0} = 0,$$

la courbure est nulle, R est infini. On dit que le point A est un *point à tangente stationnaire*, ou encore un *point d'inflexion*.

En ce sens la droite est la seule courbe dont tous les points soient des points d'inflexion (n° 99).

Comme pour le cas d'un point à courbure non nulle, nous allons chercher l'allure de la courbe (C) au voisinage d'un point d'inflexion A.

Supposons d'abord que la dérivée troisième $\overrightarrow{a_0'''}$ *ne soit ni nulle, ni parallèle à* $\overrightarrow{a_0'}$; on dit que le *point d'inflexion est ordinaire.*

Formons le développement de $\left(\overrightarrow{OM}\right)$ jusqu'au terme en t^3, on a

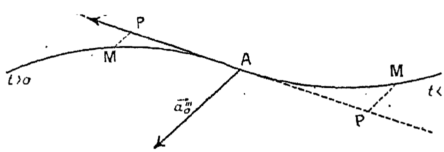
$$\overrightarrow{OP} =$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{M}$$

Le lieu de P est encore une portion de la tangente en A; pour t suffisamment petit $\left(t + \frac{\alpha}{2} t^2\right)$ est du signe de t, de sorte que sur cette tangente, orientée dans le sens de $\overrightarrow{a_0'}$, P est en deçà de A pour t négatif et au delà pour t positif. Mais le vecteur $\overrightarrow{PM}$ qu'il faut ajouter pour avoir un point de la courbe est de même sens ou de sens contraire à $\overrightarrow{a_0'''}$, suivant que t est positif ou négatif, toujours pour des valeurs assez petites de t. La courbe traverse donc la tangente au point A, il y a un *point d'inflexion graphique* (*voir* la figure).

Fig. 46.



D'une façon générale, si au point A un certain nombre de dérivées, à partir de la seconde, sont parallèles à $\overrightarrow{a_0'}$ ou nulles et si la $p^{\text{ième}}$ est la première qui ne le soit plus (p au moins égal à 3), on peut encore développer (¹) $\overrightarrow{OM}$ jusqu'à l'ordre p :

$$\lambda \ldots$$

$$\overrightarrow{PM} =$$

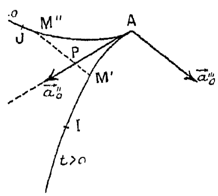
(¹) On laisse ainsi de côté le cas de certains points exceptionnels où les dérivées

On obtient la position de la courbe par rapport à sa tangente en décomposant $\overrightarrow{AM}$ en une somme de deux vecteurs :

$$= \overrightarrow{AP} + PM \qquad \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{a_0'''}\,\frac{t^3}{6}$$

A deux valeurs opposées de t correspondent : un seul point P sur la tangente $\left(\text{au delà de A, dans le sens de } \overrightarrow{a_0''}\right)$, mais deux points M qui, pour t suffisamment petit, sont définis par deux vecteurs $\overrightarrow{PM'}$, $\overrightarrow{PM''}$, l'un de même sens, l'autre de sens contraire à $\overrightarrow{a_0'''}$; ils sont par suite de part et d'autre de la tangente, d'où la forme de courbe représentée par la figure. On dit *que la forme du rebroussement est de première espèce.*

Fig. 47.



Examinons encore ce qui se passe au point de vue de l'arc en A : en calculant ds au voisinage de A, on obtient par un calcul analogue à celui qui a été fait pour le point simple (nº 104)

$$|ds| = |t| . \left[\left|\overrightarrow{a_0''}\right| + \eta(t)\right] |dt|.$$

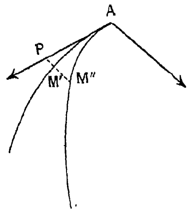
Comptons par exemple les arcs à partir du point I correspondant à la valeur t_0 négative, on peut prendre pour l'arc l'une ou l'autre des déterminations

$$s = \int_{t_0}^{t} | \qquad\qquad s' = \int_{t_0}^{t} i$$

La première détermination va en croissant avec t dans le sens IAJ; aux arcs ainsi définis on peut appliquer entre I et J une formule d'addition algébrique analogue à celle de Chasles (nº 11); mais si

fèrent pas de celles du cas précédent puisqu'elles étaient uniquement basées sur la considération du vecteur $\overrightarrow{a''_0}$.

Fig. 48.



Examinons enfin le cas général en supposant un certain nombre des coefficients du développement nuls ou parallèles entre eux.

Soient h l'ordre du premier terme non nul et k l'ordre du premier terme venant après celui-là, qui ne soit ni nul ni parallèle au premier. On a toujours

$$= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$$

En reprenant les raisonnements précédents on voit que la tangente en A est parallèle au vecteur $\overrightarrow{a_0^{(h)}}$. En outre, suivant les parités de h et k, on a diverses formes de courbes que nous nous contenterons de signaler et qui comprennent celles déjà étudiées :

h pair, k impair forme du *rebroussement de première espèce* (*fig.* 47);

h pair, k pair forme du *rebroussement de seconde espèce* (*fig.* 48);

h impair, k pair forme d'un *point ordinaire* (*fig.* 45);

h impair, k impair forme d'un *point d'inflexion ordinaire*

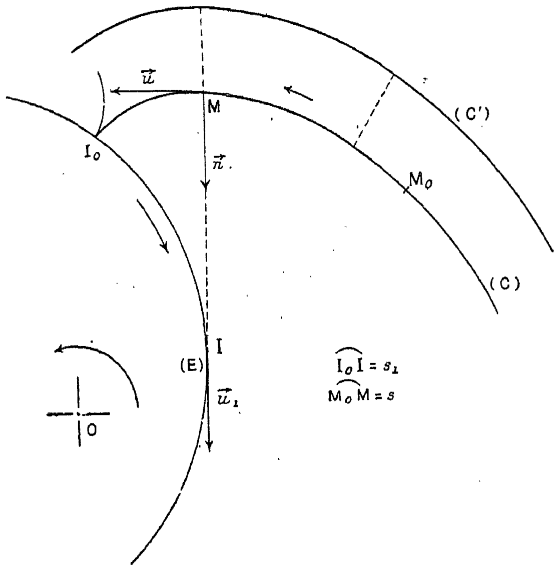
En outre, dans ces deux derniers cas, il n'y a pas ambiguïté pour

(1) Ainsi qu'il a déjà été dit (deuxième note du n° 104) ces diverses formes de branches peuvent se combiner entre elles en un même point pour constituer un « point multiple ». Comme au numéro précédent on a écarté le cas où les dérivées de la fonction seraient indéfiniment nulles ou parallèles entre elles.

tions définies, continues et dérivables du paramètre. Cet arc ne contient que des points simples à courbure non nulle.

Prenons comme paramètre l'arc s sur la courbe (C) compté à partir d'une origine fixe M_0 dans un certain sens. Désignons comme précédemment par $\vec{u}$ et $\vec{n}$ les vecteurs unitaires, sur la tangente dans

Fig. 49.



le sens de s, sur la normale dans le sens de la courbure. Le centre de courbure I est défini par l'égalité vectorielle

$$= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \mathrm{R} \;\vec{}$$

d'où, en différentiant :

mais en reprenant les valeurs de $d\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ et $\overrightarrow{dn}$ données au n° 100 :

$$d\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \vec{u}.ds, \qquad \mathrm{R}.\overrightarrow{dn} = -\vec{u}.ds;$$

on voit que $d\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right)$ se réduit à

deux points ds_1 conserve un signe constant, l'intégrale $\int_{I_1}^{I_2} ds_1$ est égale à l'arc de courbe $\widehat{I_1 I_2}$; l'intégrale définie de dR entre les mêmes limites est la variation du rayon de courbure. Donc :

La différence des rayons de courbure en deux points M_1, M_2 *de la courbe* (C) *est égale à l'arc de développée* (E) *compris entre les deux points correspondants* I_1, I_2

$$|\overline{M_2 I_2}| - |\overline{M_1 I_1}| = \widehat{I_1 I_2} ;$$

cette relation suppose que le sens des arcs sur la développée est prolongé par le sens de la courbure de (C) et qu'en outre ni ds_1, ni dR ne changent de signe entre ces deux points.

109. Points singuliers de la développée. — Considérons d'abord un point A de (C) *simple et à courbure non nulle* (nº 104). En un tel point, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ existent ; la différentielle première de $\overrightarrow{OI}$ est donnée par la relation du nº 107, on en déduit les différentielles seconde et troisième :

$$dR \;\; ds \qquad R^2$$

On calculerait de même les différentielles successives, puisque les dérivées successives de $\overrightarrow{OM}$, et par suite de $\vec{u}$, $\vec{n}$ et R existent.

On a évidemment :

$$) = -(\vec{n} \wedge \vec{u})$$

Cette formule permet de calculer le rayon de courbure R_1 de la développée ; en effet (nº 101) :

$$R \qquad \frac{|d(\overrightarrow{OI})|^3}{} = \frac{|dR|^3 R}{|ds|} = R.$$

Si la dérivée de R *n'est pas nulle en* A *le point* I *correspondant*

de la développée est simple et sans inflexion. Effectivement $d(\overrightarrow{\mathrm{OI}})$ n'est pas nul et $d^2(\overrightarrow{\mathrm{OI}})$ qui contient un terme non nul en $\vec{u}$ n'est pas

Si la *dérivée de* R *est nulle, sans qu'il en soit de même de la dérivée seconde,* R passe alors par un maximum ou un minimum, *le point* I *correspondant de la développée est un point de rebroussement ordinaire.*

Effectivement $d(\overrightarrow{\mathrm{OI}})$ est nul, $d^2(\overrightarrow{\mathrm{OI}})$ ne l'est pas et est parallèle à $\vec{n}$, la courbe (E) admet un point singulier à tangente parallèle à $\vec{n}$. Enfin $d^3(\overrightarrow{\mathrm{OI}})$ se réduit à ses deux premiers termes, et le second est un terme en $\vec{u}$ non nul. Par suite $d^3(\overrightarrow{\mathrm{OI}})$ n'est pas parallèle à $d^2(\overrightarrow{\mathrm{OI}})$ et le point singulier est bien un rebroussement ordinaire (premier cas étudié au n° 106).

On trouve des exemples de tels points en A et a, B et b sur la figure 50 ou encore en A et a sur la figure 51. Pour que la propriété du numéro précédent (différence des rayons de courbure) subsiste en b, il faut compter les arcs sur la développée dans des sens différents, en deçà et au delà du point b, c'est-à-dire prendre pour l'arc la deuxième détermination indiquée au n° 106.

Pour examiner le cas où un certain nombre de dérivées successives de R sont nulles il n'est pas nécessaire d'expliciter les dérivées successives de $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$, il suffit de se limiter à la formation relativement simple des deux premiers termes. On obtient ainsi, en supposant nulles les différentielles successives de R jusqu'à $d^p\mathrm{R}$ exclu,

$$d^p(\overrightarrow{\mathrm{OI}}) = \vec{n}.d^p\mathrm{R},$$

les différentielles précédentes de $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ étant nulles. Le produit extérieur de ces deux dernières n'est pas nul, ce qui montre que le point de la développée a suivant la parité de p la *forme d'un point de rebroussement* de première espèce (p pair, R *passe par un*

quelconque

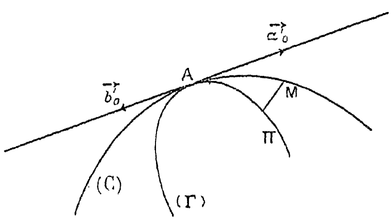
113. Contact de deux courbes. — Considérons deux courbes (C) et (Γ), hodographes des vecteurs variables

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(t), \qquad \overrightarrow{O\Pi} = \vec{b}(\theta)$$

et ayant en commun le point A correspondant à $t = 0$ et $\theta =$ supposerons en outre que (C) et (Γ) vérifient au voisinage de A les hypothèses du n° 104 et que *le point* A *est simple sur chacune d'elles;* nous désignerons par s et σ les arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{A\Pi}$.

On dit que *les courbes* (C) *et* (Γ) *ont un contact d'ordre p au point* A, *si l'on peut établir au voisinage de ce point une correspondance entre les points* M *et* Π (ou, ce qui revient au même, entre les paramètres t et θ ou entre les arcs s et σ) *telle que le vecteur* $\overrightarrow{M\Pi}$ *soit infiniment petit d'ordre supérieur à p, par rapport à l'un des arcs s ou σ, ou l'un des paramètres t ou θ* (les paramètres t et θ sont, d'après le n° 104, respectivement de même ordre que s ou σ).

Fig. 52.



Considérons les développements de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O\Pi}$ en

ils commencent par le même vecteur constant $\vec{a}(0) = \vec{b}(0)$:

$$\overrightarrow{O\Pi} = \overrightarrow{OA} \qquad \frac{1}{2}\theta^2 \vec{b}''_0 + \frac{1}{6}\theta^3 \vec{b}'''_0 + \ldots + \frac{1}{p!}\theta^p \vec{b}_0^{(p)}$$

Une correspondance entre M et Π étant établie, θ est une fonction de t. On peut alors essayer de développer $\overrightarrow{O\Pi}$ et par suite

$$\overrightarrow{M\Pi} = \overrightarrow{O\Pi} - \overrightarrow{OM}$$

en fonction de t. Pour que $\overrightarrow{M\Pi}$ soit d'ordre supérieur à t^p, il faut et il suffit que $\overrightarrow{O\Pi}$ puisse se développer jusqu'à l'ordre p au moins en fonction de t et que les coefficients vectoriels de ce développement soient les mêmes que ceux du développement de $\overrightarrow{OM}$.

Pour cela, il faut et il suffit que θ, fonction de t, se développe jusqu'à l'ordre p au moins ([1])

$$\theta = \lambda_1 t + \frac{1}{2}\lambda_2 t^2 + \frac{1}{6}\lambda_3 t^3 + \ldots + \frac{1}{p!}\lambda_p t^p + t^p \eta;$$

et qu'en remplaçant θ par cette valeur dans le développement de $\overrightarrow{O\Pi}$ et en ordonnant, on puisse déterminer les scalaires λ, de façon à avoir des coefficients vectoriels égaux à ceux du développement de $\overrightarrow{OM}$.

On obtient ainsi, en s'en tenant aux premières relations,

La possibilité de la détermination des scalaires λ entraîne naturellement des relations entre les $\vec{b}$ et les $\vec{a}$.

On voit d'abord que, $\vec{a}'_0$ et $\vec{b}'_0$ n'étant pas nuls, λ_1 est lui-même différent de o. Les infiniment petits t et θ (et par suite aussi les arcs s et σ) sont donc de même ordre et le vecteur infiniment

([1]) Effectivement, si $\overrightarrow{O\Pi}$ se développe jusqu'à l'ordre p en fonction de t, il en est de même de l'arc $\sigma = \widehat{A\Pi}$; mais θ peut lui-même se développer jusqu'à l'ordre p en fonction de σ (n° 104), donc en fonction de t.

petit $\overrightarrow{M\Pi}$ est d'ordre supérieur à p tant par rapport à s (ou t) que par rapport à σ (ou θ).

En outre, si la condition est vérifiée, on voit que

$$\left[\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right]^2, \quad \left[\frac{d(\overrightarrow{O\Pi})}{dt}\right]^2$$

sont des scalaires qui se développent aussi en fonction de t jusqu'à l'ordre $p-1$ et ont les mêmes développements, commençant par une constante non nulle. Il en est donc de même de leurs racines carrées $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\sigma}{dt}$; en intégrant on obtient encore le même résultat pour s et σ, mais jusqu'à l'ordre p. Ceci précise la relation à établir entre M et Π : *il suffit que cette relation soit telle que la différence des arcs* (avec des sens convenables)

$$s - \sigma = \widehat{AM} - \widehat{A\Pi}$$

soit un infiniment petit d'ordre supérieur à p par rapport à l'un d'eux.

On réalise notamment cette correspondance en prenant $s = \sigma$ (avec des sens convenables) et ceci fournit une nouvelle forme de la condition de contact : *pour que* (C) *et* (Γ) *aient un contact d'ordre p, il faut et il suffit que les développements des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A\Pi}$ en fonction de $s = \widehat{AM}$ et $\sigma = \widehat{A\Pi}$ aient les mêmes coefficients jusqu'à l'ordre p inclus.*

Contact du premier ordre. — Pour qu'il y ait contact du premier ordre il faut et il suffit qu'on puisse déterminer le scalaire λ_1 par la première relation indiquée, c'est-à-dire que $\overrightarrow{a'_0}$ et $\overrightarrow{b'_0}$ soient parallèles. Donc, *deux courbes qui ont un contact du premier ordre sont des courbes tangentes et inversement.*

On en déduit la propriété géométrique bien connue : si deux courbes (C) et (Γ) sont tangentes en un point A, le vecteur $\overrightarrow{M\Pi}$ qui joint deux points M et Π, convenablement choisis sur les courbes au voisinage de A (par exemple tels que $\widehat{AM} = \widehat{A\Pi}$, M et Π étant d'un même côté de la normale), est un infiniment petit d'ordre supérieur à l'arc $\widehat{AM}$ et à l'arc $\widehat{A\Pi}$.

III. — EXEMPLES DE COURBES PLANES.

théories et formules générales du para-
rticuliers de courbes

est constamment nul, on peut dire que le rayon de courbure

ii.

droite a un contact du pr

la courbe. En général, elle n a pas d

superieur; il y a seulement exception si, au point

courbe, la courbure est nulle, c'est-à-dire si le *point a une* *stationnaire*, ou est *point d'inflexion;* en un tel point la tangente un contact du troisième ordre au moins avec la courbe. Si ce contact n'est pas d'ordre supérieur, la tangente traverse la courbe (c'est le fait signalé au n° 105).

115. **Circonférence.** — Soit une circonférence de centre O, de rayon R. Prenons pour paramètre, correspondant à un point variable M, l'angle d'un rayon fixe Ox avec OM (voir *fig.* 41) :

$$\theta = (Ox, OM).$$

Prenons aussi p

celui des angles. L'arc de I en M est égal à

$$s = \widehat{IM} = R.\theta.$$

(Ces conventions sont identiques à celles du n° 91 : circonférence hodographe d'un vecteur de module constant.)

On obtient immédiatement les dérivées première et seconde du vecteur $\overrightarrow{OM}$, par rapport à s :

$$\overrightarrow{OM'} \qquad \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{ds^2} = \frac{1}{R} \quad ds \qquad = \frac{}{R^2},$$

cordes parallèles au vecteur

$$\vec{a}\,t_0 + \vec{b}.$$

On peut notamment disposer de t_0 de façon que ce diamètre soit perpendiculaire à sa direction de cordes, c'est-à-dire soit *un axe de symétrie*. Pour cela, il faut et il suffit que $\vec{a}$ et $\vec{a}.t_0+\vec{b}$ soient perpendiculaires, donc que

$$\vec{a}.\left(\vec{a}\,t_0+\vec{b}\right) = 0,$$

d'où

$$\vec{a}.\vec{b}$$

Soit S le point M_1 correspondant : c'est le *sommet* de la parabole; Sz est l'*axe* et le rapport constant $2p'$ devient dans ce cas le double du *paramètre* p de la parabole.

Faisons le changement linéaire le plus général de paramètre

il donne toujours pour $\overrightarrow{OM}$ un trinome en θ :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}.$$

Dans ce changement, le produit extérieur des coefficients de t et t^2 est multiplié par α^3 :

$$\vec{a}' \wedge \vec{b}' = \vec{a}.\alpha^2 \wedge (a.\beta + b).\alpha = (a \wedge b).\alpha^3,$$

tandis que le vecteur $\vec{a}$ est multiplié par α^2. En formant un quotient de puissances convenables des modules de ces deux vecteurs, on obtient un scalaire qui reste invariable dans le changement de paramètre. C'est

$$\frac{\left[\vec{a} \wedge 2\vec{b}\right]^2}{|\vec{a}|^3} = 4\,\frac{(\vec{a})^2.(\vec{b})^2.\sin^2\varphi}{|\vec{a}|^3} = 4\,\frac{(\vec{b})^2}{|\vec{a}|}\cdot\sin^2\varphi = 2p'.\sin^2\varphi;$$

on désigne toujours par $2p'$ le rapport constant défini plus haut et

est l'angle, au signe près et à un multiple de π près, du diamètre $\vec{a}$ avec la direction de cordes $\vec{b}$. Cette expression invariante

$$2p'.\sin^2\varphi$$

est appelée l'*invariant de la parabole*, elle est égale notamment à $2p$.

Considérons enfin une parabole définie à partir de son sommet S et de son axe Sz :

Portons sur l'axe, à partir de S, dans le sens de $\vec{a}$, une longueur égale au demi-paramètre, nous obtenons le *foyer* F :

Construisons la droite (D) normale à $\vec{a}$, passant par le point H_0 tel que

(D) est la *directrice*. On retrouve aisément la propriété fondamentale de la parabole, car

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{SM}$$

d'où le carré de la longueur de FM :

$$\overline{FM}^2 = \qquad \frac{(\vec{b})^2}{(\vec{a})^2}$$

D'autre part, la distance $\overline{HM}$ du point M à la directrice est

$$= \overline{H_0S} + \frac{a.SM}{\;} =$$

donc

118. Lemniscate. — Prenons comme définition de la lemniscate son équation en coordonnées polaires

$$\rho =$$

On déduit aisément de cette équation la forme de la courbe; une moitié en a été tracée figure 51. Adoptons les mêmes notations pour les coordonnées polaires qu'aux nos 93, 98 et 103; un point M de la courbe s'exprime en fonction de θ par l'égalité

d'où, en différentiant,

$$\left[-\vec{r}.a\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}+\vec{p}.a.\sqrt{\cos 2\theta}\right]d\theta$$

En élevant au carré on obtient, après des simplifications immédiates,

$$ds^2 = \left[d\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\right]^2 = \frac{a^2.d\theta^2}{\cos 2\theta}.$$

Prenons comme origine des arcs le point A sur Ox et comme sens celui de la flèche (*fig.* 51); lorsque θ varie de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$, le point M décrit la boucle dans le sens des arcs, qui coïncide donc avec celui des θ; par suite, ds est égal à la détermination positive de la racine carrée du second membre :

On en déduit

Cette égalité montre que *l'angle du rayon vecteur d'angle* θ *vecteur tangent* $\vec{u}$ *est* $2\theta + \frac{\pi}{2}$.

En dérivant une nouvelle fois, on obtient

$$= \left[-2r.\cos 2\theta - \vec{p}.\sin 2\theta - 2\vec{p}.\sin 2\theta - \vec{r}.\cos 2\theta\right] \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{a}$$

$$= -3.\left(\vec{r}.\cos 2\theta + \vec{p}.\sin 2\theta\right).\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{a}.$$

La parenthèse est un vecteur de module 1, obtenu en faisant tourner r d'un angle 2θ; c'est le vecteur $-\vec{n}$, d'où le sens de la concavité. Le scalaire qui la multiplie est l'inverse du rayon de courbure, changé de signe. Ce rayon de courbure est donc (1)

$$R = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

L'expression de $\overrightarrow{OM}$ montre que ce vecteur, fonction de θ, est indéfiniment dérivable pour toute valeur de θ comprise entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, exclusivement. Pour ces valeurs, c'est-à-dire au point O, $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{d\theta}$ devient infini et l'on ne peut pas développer $\overrightarrow{OM}$ suivant les puissances de $\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$; mais $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ reste fini, de sorte que l'impossibilité du développement tient à un mauvais choix du paramètre. (Cette circonstance a été signalée au début du n° 104.)

Considérons par exemple l'arc supérieur, correspondant à $\theta = +\frac{\pi}{4}$, prolongé au delà de l'origine par symétrie, et prenons comme paramètre

en convenant de donner à t le signe $+$ à droite de l'origine et le signe $-$ à gauche. Dans ces conditions, $\vec{r}$ est un vecteur de longueur 1 et d'angle polaire $+\theta$; ses composantes sur Ox et l'axe directement perpendiculaire Oy (de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$) sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$;

---

(1) C'est en utilisant cette formule et la propriété indiquée pour la tangente (et par suite pour la normale) à la lemniscate (C) que la développée (E) a été construite par points sur la figure 51.

elles se développent en fonction de t :

$$\cos\theta =$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}} =$$

Dans la dernière égalité, on a désigné par $\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$ les vecteurs unitaires d'angles polaires $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On en déduit le développement de $\overrightarrow{OM}$, en multipliant par $a.t$:

Le point O est donc simple sur la branche de courbe considérée. Le coefficient du terme en t^2 étant nul, la courbure est nulle (R infini), O est *un point d'inflexion;* il est *ordinaire* (n° 105), car les coefficients des termes en t et t^3 ne sont pas parallèles (¹).

119. **Cycloïde.** — La cycloïde est la courbe engendrée par un point M d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe Ox. En supposant qu'au début du mouvement M coïncide avec O, la condition de roulement sans glissement se traduit par l'égalité suivante, où P est le point de contact :

$$\text{arc}\,\widehat{PM} = \overline{OP}.$$

La forme de la courbe se déduit assez simplement de sa définition géométrique; elle est composée d'*arches* qui se reproduisent par une translation parallèle à Ox (on en a représenté une et amorcé deux autres sur la figure 54).

(¹) On peut suivre une méthode analogue à celle qu'on vient d'employer pour la lemniscate dans l'étude de diverses courbes dont l'équation polaire est simple, par exemple les spirales, la strophoïde et la cissoïde droite, etc.

rotation de $+\frac{\pi}{2}$; d'après la règle du n° 91, on a

$$dt \qquad \cdot\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{AM})}{dt} = \overrightarrow{AM'}\cdot\frac{d}{dt}\left(Ox, \overrightarrow{AM}\right) = - ;$$

$$\overline{dt^2}$$

d'où

$$dt^2$$

Formons le produit extérieur de ces deux vecteurs ainsi que le carré du premier, on obtient :

$$\wedge$$

$$= \vec{k}.18.(\cos 4t - 1),$$

$$= 9 - 18.\cos 4t + 9 = 18.(1 - \cos 4t).$$

Le rapport de la formule du n° 112 a donc pour valeur -1, d'où la position du point I :

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} - 3.\overrightarrow{AM},$$

ou, en tenant compte de la valeur de $\overrightarrow{OM}$,

$$\overrightarrow{OI} = 2.\overrightarrow{OA} - 2.\overrightarrow{AM}.$$

On en déduit la construction indiquée sur la figure : on porte $\overrightarrow{OA_1}$ double de $\overrightarrow{OA}$, puis $\overrightarrow{A_1I} = -2.\overrightarrow{AM}$. Le point I est sur la circonférence de rayon 2, tangente extérieurement en P à la circonférence fixe; il est encore sur la droite MP. On voit aussi facilement que son lieu est une hypocycloïde à quatre rebroussements, engendrée par la

courbe est dans un plan. Effectivement, $\vec{b}$ étant constant sur cet arc, exprimons que $d\left(\overrightarrow{OM}\right)$, porté par la tangente à la courbe, est perpendiculaire à $\vec{b}$; on obtient

d'où, en intégrant,

$$\overrightarrow{OM}.\vec{b} = p \qquad (p \text{ scalaire constant}).$$

Ceci exprime bien que M est dans un plan fixe, perpendiculaire à $\vec{b}$, et défini précisément par l'équation précédente (n° 72). La réciprocité est immédiate : *pour une courbe plane, la torsion est nulle;* effectivement, le vecteur $\vec{b}$ (déjà défini au n° 100) est constant sur tout arc de courbe où la courbure ne change pas de sens. Nous reviendrons aussi plus loin sur les points « particuliers » d'une courbe gauche proprement dite, où la torsion est nulle.

Courbes symétriques. — Soit une courbe (C) et sa symétrique (C_1) par rapport à un plan ou à un point. Conservons sur (C_1) le sens des arcs déduit par symétrie du sens sur (C). En des points M, M_1 symétriques sur les deux courbes, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}_1$ sont symétriques, donc aussi leurs dérivées et par conséquent les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{n}_1$. Mais les trièdres $\left(\vec{u}, \vec{n}, \vec{b}\right)$, $\left(\vec{u}_1, \vec{n}_1, \vec{b}_1\right)$ devant être directs $\vec{b}_1$ est opposé au symétrique de $\vec{b}$, et il en est de même de leurs dérivées. Par suite, les *torsions* en M et M_1 sont de même valeur absolue, mais de *signes contraires*.

En particulier puisque une courbe plane peut coïncider avec sa symétrique, sa torsion doit être nulle; on pourrait même établir ainsi la réciproque déjà indiquée.

123. Trièdre et formules de Frenet. — En prenant sur la tangente à la courbe (C) en M, le sens des arcs croissants Mt, sur la normale principale le sens de la courbure Mn et sur la binormale le sens Mb directement perpendiculaire aux deux autres, dans l'espace orienté, on obtient un trièdre trirectangle direct. Les vecteurs unitaires des

axes de ce trièdre sont $\vec{u}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Ainsi que nous l'avons déjà dit au sujet des courbes planes (n° 100), ce trièdre est appelé le *trièdre de Frenet* attaché au point M de (C).

Dans les deux numéros précédents on a donné les dérivées de $\vec{u}$ et $\vec{b}$ par rapport à s. En raisonnant comme au n° 100, on obtient la dérivée de $\vec{n}$ (mais cette fois $\vec{b}$ est variable) ; on a

$$= - u \wedge \vec{b};$$

d'où, en dérivant,

$$\frac{d\vec{n}}{ds} \qquad \vec{u} = \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{1}{R},$$

Cette formule constitue, avec les précédentes, le groupe des formules de Frenet :

$$du \quad = \quad \frac{}{R} n,$$

$$dn \quad \frac{1}{R}\vec{u} - \frac{1}{T}$$

$$\overline{ds} \quad \frac{1}{T}\vec{n}.$$

En langage cartésien, ces formules donnent, naturellement, les dérivées par rapport à l'arc des cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, orientées comme il a été dit.

126. Expression de la courbure. — Soit une courbe (C) définie paramétriquement; pour obtenir l'expression de la courbure, il suffit de reprendre le calcul déjà fait pour une courbe plane (n° 101) : on a

d'où

En égalant les modules des deux membres et remplaçant ds

par d

soit encore, en introduisant leurs coordonnées et leurs dérivées,

$$\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\ldots''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2}$$

On peut d'ailleurs transformer le dénominateur, en appliquant l'identité de Lagrange (n° 29); on le remplace par la racine carrée de

Dans le cas particulier où la variable est l'arc, les formules se simplifient : le numérateur de R devient égal à 1, le dénominateur à $\left|\frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{ds^2}\right|$; on retrouve la définition de la courbure (n° 123); en coordonnées cartésiennes, cette expression devient

$$\frac{d^2x}{ds^2} \qquad \frac{d^2}{ds^2} \qquad + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right.$$

127. Expression de la torsion. — Différentions $d^2(\overrightarrow{OM})$; dans l'expression de $d^3(\overrightarrow{OM})$ figurent des produits de scalaires par $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$. Retenons seulement l'expression du terme en $\vec{b}$, qui s'introduit par la différentiation du vecteur $\vec{n}$, d'après la seconde formule de Frenet; on a ainsi

$$.\vec{n} \qquad (\text{A et B scalaires}).$$

Formons le produit mixte des trois premières différentielles de $\overrightarrow{OM}$ (qui est l'expression invariante, signalée au n° 88) :

$$d(\overrightarrow{OM}).\left[d^2(\overrightarrow{OM}) \wedge d^3(\overrightarrow{OM})\right];$$

dans le produit extérieur, il reste des termes en $\vec{u} \wedge \vec{b}$, $\vec{u} \wedge \vec{n}$, $\vec{n} \wedge \vec{b}$,

dessus. Si le produit est négatif (schéma de droite), *la torsion est positive, la courbe passe du dessus au-dessous.*

Cherchons encore le développement de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de l'arc s; on obtient immédiatement les premières dérivées par application des formules de Frenet :

$$\frac{d(\overrightarrow{AM})}{ds} = \vec{u}, \qquad \frac{d^2(\overrightarrow{AM})}{ds^2} = \frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{1}{R}.\vec{n},$$

$$\frac{d^3(\overrightarrow{AM})}{ds^3} = -\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}.\vec{n} + \frac{1}{R}\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{R^2}\vec{u} - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\vec{n} - \frac{1}{RT}\vec{b}.$$

On en déduit leurs valeurs pour $s = 0$, et le développement de $\overrightarrow{AM}$ au voisinage de A :

encore, en groupant les premiers termes,

$$- \ldots s) . \qquad \cdot b_0 + s^3.\vec{\varepsilon}(s).$$

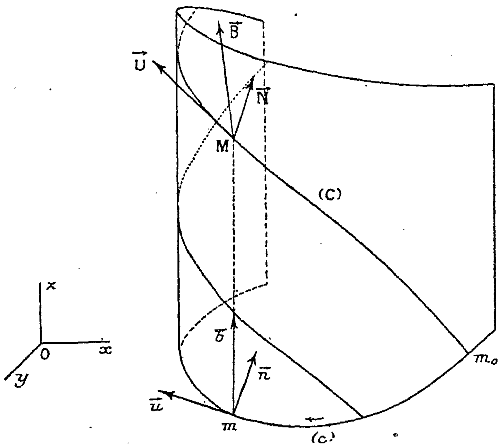
Interprétons cette formule : les coefficients de $\vec{u}_0$, $\vec{n}_0$, $\vec{b}_0$ infiniment petits près d'ordre supérieur à 3 par rapport à s, les distances du point M au *plan normal*, au *plan rectifiant* et au *plan osculateur*. Ces distances sont respectivement du premier, du second et du troisième ordre par rapport à s.

129. **Application aux hélices.** — Soit une courbe (c), lieu d'un point m dans un plan (P), et la surface cylindrique de section droite (c), engendrée par la droite mz perpendiculaire à (P). On appelle « hélice » de cette surface le lieu d'un point M de la génératrice mz tel que $\overline{mM}$ varie proportionnellement à l'arc $s = \overset{\frown}{m_0 m}$ de la section droite, décrit par m à partir d'une certaine origine m_0. On obtient les diverses hélices du cylindre en faisant varier l'origine m_0, le coefficient de proportionnalité et le sens de l'enroulement. La variation de m_0 donne des hélices égales (déduites par translation parallèle aux génératrices; la variation du sens de $\overline{mM}$ donne des hélices symétriques par rapport à (P).

Appelons $\vec{k}$ le vecteur unitaire porté par la génératrice, dans le sens de l'enroulement. Une hélice (C) est donc l'hodographe de la fonction de s :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \vec{k}.hs,$$

Fig. 59.



Appelons S l'arc de l'hélice (C), compté à partir de m_0, et $\vec{u}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ d'une part, $\vec{U}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ d'autre part, les vecteurs unitaires des trièdres de Frenet de (c) et (C). Pour le premier on a $\vec{b} = \varepsilon.\vec{k}$, ε étant égal à $+1$ ou -1 suivant le sens de l'enroulement (n° 100).

En différentiant $\overrightarrow{OM}$, on obtient :

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{u}.ds + \vec{k}.h.ds,$$

$$dS^2 = (1 + h^2).ds^2.$$

L'arc d'hélice est donc proportionnel à l'arc de section droite et par suite à la cote $\overline{mM}$. On déduit de $\vec{U}$ et, en différentiant à nouveau, $\vec{N}$:

$\vec{N}$

$\overline{1 + h^2}$

La normale principale à l'hélice est parallèle à la normale à la section droite, les sens de courbure sont les mêmes et les rayons de courbure R et r sont proportionnels :

$$\vec{\mathrm{N}} = \vec{n}, \qquad \mathrm{R} = (1 + h^2).r.$$

Le vecteur $\vec{\mathrm{B}}$ binormal à l'hélice est

$$\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{U}} \wedge \vec{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

d'où en dérivant une nouvelle fois

$$\frac{d\mathrm{B}}{d\mathrm{S}} \qquad - \varepsilon h \, \vec{n}$$

la dérivée du vecteur binormal est bien parallèle à $\vec{n}$ (n° 124); en outre le rayon de torsion T est proportionnel au rayon de courbure r de (c) et par suite à celui R de l'hélice (¹) :

$$\mathrm{T} = -\varepsilon . \frac{1 + h^2}{h} . r = -\frac{\varepsilon . \mathrm{R}}{h}.$$

Dans le cas de l'hélice circulaire (c) étant un cercle, r et par suite R et T sont constants.

130. Définitions diverses du plan osculateur. — En considérant toujours un point ordinaire, on peut établir diverses propriétés caractéristiques du plan osculateur susceptibles de lui servir de définition :

1° *Le plan osculateur en un point ordinaire* A *est le plan passant par la tangente en* A *et par un point de la courbe infiniment voisin de* A (*voir* au n° 122, pour préciser la locution « infiniment voisin »).

Effectivement le plan (P) passant par la tangente en A et un point M voisin de A, correspondant à la valeur t, est défini par les deux vecteurs

$$\vec{a}_0, \qquad \frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{a}'_0 + \vec{a}''_0 . \frac{t}{2} + t.\vec{\varepsilon}(t).$$

(¹) Cette propriété est caractéristique de l'hélice; toute courbe, telle qu'il existe un rapport constant entre les rayons de courbure et de torsion, est une hélice.

On obtient un vecteur normal à (P), en formant leur produit extérieur :

le quotient de ce produit par $\frac{t}{2}$ a pour limite $\vec{a}'_0 \wedge \vec{a}''_0$, vecteur parallèle à la binormale.

2° *Le plan osculateur en un point ordinaire* A *est le plan passant par* A *et deux points de la courbe infiniment voisins.*

Effectivement soient M et M′ voisins de A, de paramètres t et t' ; le plan (P) passant par A, M, M′ est défini par les vecteurs

$$\vec{a}''_0 \frac{t}{2} \qquad \vec{a}_0 . \frac{t'}{2} + t'\vec{\varepsilon}(t').$$

La normale à P est définie par le vecteur

$$\frac{1}{tt'} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AM'} = (\vec{a}'_0 \wedge \vec{a}''_0) \frac{1}{2}(t'-t) + a'_0 \wedge$$

En développant $\vec{\varepsilon}(t')$ par rapport à $t - t'$, on voit que le quotient du vecteur précédent par $\frac{1}{2}(t'-t)$ a toujours pour limite $\vec{a}'_0 \wedge \vec{a}''_0$ lorsque t et t' tendent vers o.

3° *Le plan osculateur en un point ordinaire* A *est le seul plan passant par la tangente qui traverse la courbe.* Considérons un plan (P) passant par la tangente et soit $\vec{c}$ un vecteur normal à (P), par suite normal à a'_0 $(a'_0 . c = 0)$. La position d'un point M de la courbe par rapport au plan (P) est donné par le signe du produit intérieur

$$= \Big[$$

Le signe de ce produit est en général indépendant de celui de t, lorsque t est voisin de o ; la courbe est donc d'un même côté de (P).

Il n'y a exception que si $(\overrightarrow{a'_0}.\overrightarrow{c})$ est nul, c'est-à-dire si c diculaire à la fois à $\overrightarrow{a'_0}$ et $\overrightarrow{a''_0}$, donc est sur la binormale.

131. Points exceptionnels (¹). — Examinons brièvement le cas d'un point non ordinaire A correspondant à la valeur o du paramètre t. Supposons toujours $\overrightarrow{AM}$ développable; soit $\overrightarrow{a_1}t^h$ le premier ter non nul du développement; soit $\overrightarrow{a_2}t^k$ le premier des termes suivants qui ne soit ni nul, ni parallèle à $\overrightarrow{a_1}$; soit enfin $\overrightarrow{a_3}t^r$ le premier terme après $\overrightarrow{a_2}t^k$ qui ne soit ni nul, ni situé dans le plan de $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$. Les termes compris entre $\overrightarrow{a_1}t^h$ et $\overrightarrow{a_2}t^k$ sont de la forme $\lambda\overrightarrow{a_1}t^{h'}(h < h' < k$

mes entre $\overrightarrow{a_2}t^k$ et $\overrightarrow{a_3}t^r$ sont de la f

$(k < k' < r$, λ' et μ' scalaires). En tenant compte de ces remarques le développement s'écrit, en mettant en facteur $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ dans les premiers termes :

f et g sont des polynomes en t ayant pour terme constant 1.

La direction limite du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est la même que celle de son quotient par t^h, c'est par suite celle de $\overrightarrow{a_1}$; *il y a une tangente en* A (limite d'une sécante) *et elle est parallèle à* $\overrightarrow{a_1}$.

La tangente Mθ en un point voisin de A est parallèle au vecteur, dérivée de $\overrightarrow{AM}$ par rapport à t, qu'on peut écrire :

$$\overrightarrow{u'} = \frac{d(\overrightarrow{AM})}{dt} = \overrightarrow{a_1}.t^{h-1}.f_1(t) + \overrightarrow{a_2}.k.t^{k-1} + t^{k-1}.\overrightarrow{\varepsilon_1}(t).$$

On obtient un vecteur perpendiculaire aux deux tangentes, en for-

(¹) On laisse de côté le cas de certains points exceptionnels où les dérivées seraient constamment nulles, ou parallèles, ou dans un même plan (*voir* la note du n° 105).

mant le produit extérieur :

$$\vec{a_1} \wedge \vec{u'} = (\vec{a_1} \wedge \vec{a_2}.)\, k.t^{k-1} + t^{k-1}.\vec{\varepsilon_2}(t).$$

La direction de ce vecteur a la même limite que son quotient par le scalaire $k.t^{k-1}$: c'est donc une parallèle à $\vec{a_1} \wedge \vec{a_2}$. La *binormale* (définie au n° 122) *en* A *est donc parallèle à* $\vec{a_1} \wedge \vec{a_2}$ *et le plan osculateur est le plan des vecteurs* $\vec{a_1}$ *et* $\vec{a_2}$.

La forme de la courbe au voisinage du point A dépend des parités respectives des nombres h, k, r. On peut écrire le développement :

$$\text{AM} = \text{AP} + \text{PQ} + \text{QM}$$

$$\overrightarrow{\text{QM}} = \iota$$

Pour t assez petit en valeur absolue, le lieu de P est une portion de la tangente Aθ voisine de A : de part et d'autre de A si h est impair, d'un même côté si h est pair. Le lieu de Q est une courbe du plan osculateur : elle est dans une même région par rapport à sa tangente si k est pair, de part et d'autre si k est impair. Enfin $\overrightarrow{\text{QM}}$ caractérise la position de la branche de courbe gauche par rapport au plan osculateur : de part et d'autre si r est impair, d'un même côté si r est pair.

On en déduit aisément les diverses formes de courbes correspondant aux huit combinaisons possibles pour la parité de h, k et r.

Si h est impair et k pair, le lieu de Q a l'aspect d'un point ordinaire d'une courbe plane. *Si r est impair*, la courbe traverse son plan osculateur et a la forme d'un *point ordinaire* (*fig.* 58) d'une courbe gauche; le point ordinaire correspond d'ailleurs à $h = 1$, $k = 2$, $r = 3$.

Si r est pair, la courbe est d'un même côté de son plan osculateur, d'où l'aspect de la figure 60. Le cas le plus simple, correspondant à

On a (n° 94)

$$- v_0 | 3 \text{ Max. } \frac{\partial a_v}{\partial v}(u, v')$$

Lorsque t tend vers t_0, $v - v_0$ tend vers o, par suite aussi $\vec{\varepsilon}$; d'autre part $\vec{a}'_v(u, v_0)$ étant continue tend vers $\vec{a}'_v(u_0, v_0)$; donc ce premier rapport tend vers $\vec{a}'_v(u_0, v_0)$.

D'après la définition même des dérivées les trois autres rapports du second membre ont pour limites

$$v'_t(t_0); \quad \vec{a}'_u(u_0, v_0); \quad u'_t(t_0).$$

Donc l'expression de la limite du premier membre est bien de la forme annoncée.

Il est à remarquer que cette démonstration suppose l'existence et la limitation au voisinage de m_0 de la dérivée par rapport à v de la fonction $\vec{a}'_v(u, v)$. On peut donner une démonstration basée uniquement sur l'hypothèse de la continuité des dérivées premières en établissant la propriété pour la projection de $\vec{a}$ sur trois axes de coordonnées rectangulaires.

139. Différentielle totale. — Sur un chemin passant par m_0, le vecteur $\vec{a}$ et les scalaires u et v sont des fonctions simultanées. Dans la relation homogène et linéaire qui lie leurs dérivées, on peut les remplacer par les différentielles (égales aux produits des dérivées par un facteur scalaire arbitraire, n° 85) on obtient

$$\overrightarrow{da} = \vec{a}'_u . du + \vec{a}'_v . dv.$$

Cette relation a lieu, quel que soit le système de différentielles considéré sur le chemin et quel que soit ce chemin.

Le second membre de l'égalité, lorsqu'on y regarde du et dv comme complètement indéterminés, est appelé la « *différentielle totale* » de la fonction $\vec{a}(u, v)$.

l'indice A rappelle que les dérivées partielles doivent être prises au point A. On traduira immédiatement ces équations en coordonnées cartésiennes; nous nous contenterons d'indiquer ici les expressions d'un système de paramètres directeurs (n° 59) de la normale, constitué par les composantes du produit extérieur. Ce sont les mineurs du tableau (n° 27)

$$x'_v \quad y'_v \quad z'_v$$

c'est-à-dire [1]

On peut particulariser ces diverses relations et résultats en choisissant pour u et v des variables spéciales. On prend souvent les coordonnées de la projection m du point M sur le plan Ox, y; la surface est alors définie par l'expression de la cote z du point M en fonction de x, y, soit

$$z = f(x, y)$$

d'où

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.x + \vec{j}.y + \vec{k}.f(x, y).$$

On désigne par p, q les dérivées partielles de f, par r, s, t les dérivées partielles secondes, de sorte que

Ces notations acquises, on a

$$\partial(\overrightarrow{OM}) \quad = \vec{i} + \vec{k}.p, \qquad \partial(\overrightarrow{OM})$$

Le vecteur normal est donc

$$\frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial x} \wedge \frac{\partial(\overrightarrow{OM})}{\partial y}$$

(1) Ce sont les déterminants fonctionnels de y, z; z, x; x, y par rapport à u, v, qu'on représente avec la notation de Jacobi (n° 139) par :

$$\overline{\mathrm{D}(u,}$$

et un système de paramètres directeurs de cette normale est

$$-p, \quad -q, \quad 1.$$

Les équations du plan tangent et de la normale sont :

plan tangent : $\quad -p(X-x_0)-q(Y-y_0)+(Z-z_0)=0;$

normale : $\quad \dfrac{X-x_0}{p}=\dfrac{Y-y_0}{q}\quad\dfrac{Z-z_0}{1}$

145. Point singulier d'une surface. — Si le produit extérieur des dérivées partielles est nul en A

$$\overrightarrow{a'_u}(u_0, v_0) \wedge \overrightarrow{a'_v}(u_0, v_0) = 0,$$

on dit que A est un *point singulier* de la surface S. Nous nous contenterons d'examiner quelques types de points singuliers, en supposant, comme pour les courbes planes, que la fonction $\vec{a}(u, v)$ admet indéfiniment des dérivées, limitées supérieurement au voisinage de (u_0, v_0).

Considérons d'abord le cas où *les deux dérivées partielles ne sont pas nulles simultanément*. Ce sont alors des vecteurs parallèles à une même direction At, l'un d'entre eux pouvant être nul. Les divers vecteurs portés par les tangentes en A aux courbes (C) tracées sur S,

$$d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{a'_u}.u'_t+\overrightarrow{a'_v}\ldots,$$

sont parallèles à cette direction At et exceptionnellement peuvent s'annuler pour un choix convenable du rapport $u'_t : v'_t$; dans ce dernier cas, la courbe (C) a un point singulier en A (n° 106) (au moins par rapport à la représentation adoptée) et sa tangente n'est plus nécessairement At. Donc :

Toutes les courbes (C) *tracées sur la surface* (S) *et passant par un point singulier* A *(où les deux dérivées partielles de* $\vec{a}$ *ne sont pas nulles) sont tangentes en* A *à une même direction* At, *exception faite peut-être pour une famille de courbes admettant* A *comme point singulier.*

qu'elles sont de la forme

$$(n-2)!$$

$$\overrightarrow{a^{(n)}_{u^n}} = \overrightarrow{a^{(n)}_{u^n}}$$

Il en résulte que les $n-1$ premières dérivées sont toujours nulles pour $u = v = 0$; pour la $n^{\text{ième}}$, il suffit, pour l'annuler, de prendre pour α le rapport changé de signe de $\overrightarrow{a^{(n)}_{u^n}}(0, 0)$ au vecteur parallèle non nul $\overrightarrow{a'_{v_0}}$.

On est ainsi amené à envisager deux cas : ou bien l'opération peut se continuer indéfiniment; ou bien on aboutit à une dérivée partielle non parallèle à $\overrightarrow{a'_{v_0}}$.

Point conique. — Considérons le premier cas et supposons qu'après avoir peut-être fait un changement de variables, *toutes les dérivées partielles par rapport à u soient nulles en* A :

$$0 = \overrightarrow{\frac{\partial a}{\partial u}}(0, 0) = \overrightarrow{\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}}(0, 0) = \ldots = \overrightarrow{\frac{\partial^n a}{\partial u^n}}(0, 0) = \ldots.$$

Pour obtenir un développement de $\vec{a}$ en fonction d'un paramètre sur une courbe passant par A, appliquons d'abord la formule de Taylor à la fonction de deux variables (n° **141**)

$$\vec{a}(u, v) = \vec{a}(0, 0) + v.\overrightarrow{a'_{v_0}} + \frac{1}{2}\left(u.\overrightarrow{a'_{u_0}} + v.\overrightarrow{a'_{v_0}}\right)^{(2)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(u\overrightarrow{a'_{u_0}} + v\overrightarrow{a'_{v_0}}\right)^{(n-1)} + \vec{\varphi}(u, v).$$

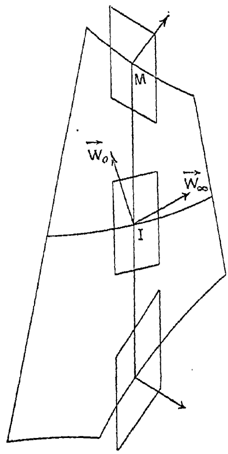
Dans le développement des puissances symboliques, les termes en u seul disparaissent; tous les autres termes sont des produits de v par des infiniment petits; il en est de même dans φ sauf un terme en u^n. On en déduit donc l'égalité

$$= \vec{a}(0, 0) \cdot$$

génératrice passant par M; *quand* M *décrit la génératrice, le plan tangent tourne, d'une manière continue, autour de cette droite.*

La direction $\vec{w}_\infty$ correspond à v infini : c'est la direction limite de la normale lorsque M s'éloigne à l'infini sur la génératrice. Il existe sur la génératrice un point I où le plan tangent est perpendiculaire

Fig. 66.



à la direction précédente; I, qu'on nomme le *point*
pond à la valeur de v, solution de l'équation (1) :

$$0 = \vec{w}_\infty . (\vec{w}_0 + v . \vec{w}_\infty) =$$

---

telle que $\vec{w}$ devienne perpendiculaire à un vecteur donné $\vec{d}$ de son plan :

v est bien déterminé d'une manière unique comme le quotient de deux scalaires; lorsque $\vec{d}$ est normal à $\vec{w}_\infty$ on a encore une seule valeur pour v, à condition de ne pas distinguer $+\infty$ de $-\infty$.

(1) La valeur du paramètre v, définie par cette équation

$$(\vec{a} \wedge \vec{b'}) . (\vec{a} \wedge \vec{a'})$$

s'écrit, d'après le n° 35,

$$v_1 = - \frac{(\vec{a})^2 . (\vec{a'} . \vec{b'}) - (\vec{a} . \vec{a'})(\vec{a} . \vec{b'})}{(\vec{a})^2 . (\vec{a'})^2 - (\vec{a} . \vec{a'})^2}.$$

Adoptons un sens positif sur la génératrice et changeons de paramètre v en prenant pour paramètre la mesure de $\overrightarrow{IM}$ sur cet axe. L'expression de $\overrightarrow{OM}$ et celle de $\vec{w}$ sont toujours de la même forme, toutefois dans

les vecteurs sont perpendiculaires : $\overrightarrow{w'_0}.\overrightarrow{w'_\infty} = 0$. Les deux parties de la somme représentent les composantes du vecteur $\vec{w}$ sur deux axes rectangulaires; leur rapport est égal à la tangente de l'angle du premier axe avec $\vec{w}$, de sorte que

$$\overline{IM} = \quad \operatorname{tang}\varphi, \qquad \varphi = (\overrightarrow{w'_0}, \vec{w})$$

et, par suite ([1]),

$$\overline{IM} = K.\operatorname{tang}\varphi, \qquad K =$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Chasles* et la constante K ([2]) est appelée le *paramètre de distribution*.

En utilisant le calcul du n° 77, on peut encore montrer que le point central est le pied de la perpendiculaire commune à une génératrice et à la génératrice infiniment voisine. Les calculs esquissés

---

Cette expression se simplifie beaucoup si $\vec{a}$ est un vecteur unitaire; elle devient :

$$\vec{a'}.\vec{b'}$$

([1]) L'angle φ est défini à un multiple de π près dans le plan orienté de $\overrightarrow{w'_0}$ vers $\overrightarrow{w'_\infty}$.

([2]) On a

$$\frac{(\overrightarrow{w'_0})^2}{\quad} = \frac{(\vec{a}\wedge\vec{b'})^2}{\quad} \qquad (\vec{a})^2.(\vec{b'})^2 - (\vec{a}.\vec{b'})^2$$

Si $\vec{a}$ est un vecteur unitaire sur la génératrice, la formule devient :

$$K^2 =$$

aussi de déterminer le lieu du
; (¹).

direction fixe ; $\vec{w}_0$

Pour valeur v_1 convenable de v, $\vec{w} =$

c'est-à-($\vec{b}' +$

généra

corresp

infinité

que. Sinon c'est,
nt. Le plan tangent aux courbes qui admettent A
est manifestement le plan tangent commun à
la génératrice ; car si une certaine dérivée

de

pendiculaire à $\vec{w}$ à cause de l'identité en v :

$$\vec{w}_0 \left(\vec{b}' + v \vec{a}'\right) = 0.$$

Nous reviendrons plus loin (n° 167) sur l'étude des surfaces réglées où une telle circonstance se produit pour toutes les génératrices ; nous avons déjà vu que c'est le cas du cône (le point singulier est conique) et du cylindre (le point singulier est rejeté à l'infini).

Si $\vec{a}'$ et $\vec{b}'$ sont tous deux parallèles à $\vec{a}$ pour une valeur de u, tous les

---

(¹) Si l'on prend la surface sous la forme $\overrightarrow{OM} = \vec{b}(u) + v\vec{a}(u)$, la ligne de striction est définie par

$$\overrightarrow{OI} = \vec{b}(u) + v_1(u)\,\vec{a}(u),$$

$v_1(u)$ ayant la valeur donnée en note. Pour illustrer ces généralités, on pourra en faire l'application à la surface réglée de révolution (hyperboloïde)

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{r}$$

ixe ; r lan à $\vec{k}$,

$= \vec{k} \wedge \vec{r}$.

forme $\vec{k}.u$ (en supposant D menée par O, parallèlement à $\vec{k}$), et $\vec{a}(u)$ parallèle à P. La surface est l'hodographe de

$$\overrightarrow{OM} = \vec{k}.u + v.\vec{a}(u), \qquad \vec{n}.\vec{a}(u) = 0,$$

$\vec{n}$ normale à P. Le *conoïde* est *droit* si P est perpendiculaire à D, c'est-à-dire si $\vec{n} = \vec{k}$.

III. — COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

151. But du présent paragraphe. — L'étude des courbes tracées sur une surface a fait l'objet de nombreuses recherches depuis les géomètres de la fin du XVIII^e siècle. Il semble au moins commode d'introduire dans cette étude les notations vectorielles. Les dimensions de cet Ouvrage ne nous permettent pas d'esquisser cette introduction, déjà réalisée actuellement d'ailleurs par de nombreux chercheurs. Nous nous contenterons de reprendre pour les courbes tracées sur une surface et passant par un point donné A les notions d'arc et de courbure étudiées au Chapitre précédent.

Nous nous donnerons une courbe par l'expression des coordonnées curvilignes u, v d'un de ses points en fonctions simultanées d'un paramètre; et nous supposerons, en général, que ces fonctions admettent des dérivées non nulles simultanément au point étudié. Pour étendre les résultats obtenus ainsi à des courbes tracées sur la surface, mais définies par des conditions géométriques, il faudra au préalable vérifier que ces courbes remplissent bien les conditions « analytiques » précédentes, ou s'il n'en est pas ainsi étudier directement la question, comme on l'a fait, au n° 144 pour le plan tangent.

Vérifions que ces conditions analytiques sont remplies en particulier pour une section plane non tangente. D'une façon précise : *si l'on considère un point ordinaire* A *d'une surface* (S) *et un plan* (P) *passant par* A *et non tangent à* (S), *ce plan rencontre la surface suivant une courbe* (C); *sur cette courbe les coordonnées curvilignes* u, v *sont des fonctions simultanées d'un même paramètre et l'on peut choisir ce paramètre de façon que les dérivées de* u *et* v *ne soient pas toutes les deux nulles au point* A. Considérons la

surface (S) hodographe de la fonction $\vec{a}(u, v)$ et le plan (P) défini par l'équation (n° 72)

$$\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{OA}}.$$

En remplaçant $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par $\vec{a}(u, v)$, cette équation définit une relation entre u et v, et en différentiant on obtient

$$(\overrightarrow{a'_u}.\vec{n}).du + (\overrightarrow{a'_v}.\vec{n}).dv = 0,$$

$\vec{n}$ n'étant pas normal à la surface l'une des parenthèses n'est pas nulle; le rapport $du : dv$ est par suite déterminé; l'une des différentielles est différente de o, l'autre restant finie.

152. **Arc d'une courbe sur une surface.** — En conservant ces notations considérons une courbe (C) définie par u, v fonctions d'un paramètre, sur la surface (S), hodographe de $\vec{a}(u, v)$. On obtient l'arc s de cette courbe en appliquant la formule du n° 97 et l'expression de la différentielle totale (n^{os} 138, 139)

$$(\overrightarrow{a'_v}.dv)^2 = (\overrightarrow{a'_u})^2.du^2 + 2(\overrightarrow{a'_u}.\overrightarrow{a'_v}).du.dv + (\overrightarrow{a'_v})^2.dv^2.$$

On écrit habituellement

$$ds^2 = \mathrm{E}.du^2 + 2\mathrm{F}.du.dv + \mathrm{G}.dv^2,$$

E, F, G sont des fonctions scalaires de u, v ayant pour expressions

$$\mathrm{F} = \frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{OM}})}{\partial u}.\frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{OM}})}{\partial v}, \qquad \mathrm{G} = \left[\frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{OM}})}{\partial v}\right]^2.$$

Ces valeurs [1] étant supposées calculées en fonction de u, v, la longueur d'un arc de courbe AB de la surface est donnée par l'intégrale définie

$$\int \sqrt{\mathrm{E}.du^2 + 2\mathrm{F}.du.dv + \mathrm{G}.dv^2},$$

[1] On en déduit immédiatement leurs expressions en fonction des dérivées des coordonnées.

Considérons encore cette même surface plane rapportée à des coordonnées polaires (n° 51) $u = \rho$, $v = \theta$. Les courbes coordonnées $\rho =$ const. (cercles) et $\theta =$ const. (demi-droites) sont rectangulaires. La surface est alors définie comme l'hodographe de la fonction de ρ et θ (par l'intermédiaire de $\vec{r}$, défini comme au n° 93)

On en déduit le

$$(\vec{\ }$$

Dans ce système de représentation le pôle I se présente comme un point singulier de la surface (correspondant à $\rho = 0$ et à toutes les valeurs de θ).

Indiquons encore succinctement les formes du ds^2 des diverses surfaces étudiées au paragraphe précédent. Pour une *surface cylindrique* (n° 146) :

En prenant pour directrice une section droite, et pour paramètre u l'arc de cette directrice, cette expression devient

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \qquad \ldots = 1,\ \vec{a}'.\vec{k} = 0$$

Pour une *surface conique* (n° 147) :

$$v.(\vec{a}'.\vec{a})\,du.dv$$

En prenant pour $\vec{a}(u)$ un vecteur unitaire et pour u l'arc de la courbe sphérique décrite par l'extrémité de ce vecteur, l'expression devient

$$(a^2 = \vec{a}'^2 = 1,\ \vec{a}.\vec{a}' = 0)$$

Pour une *surface de révolution* (n° 148) :

Pour une *surface réglée* (n° 149) :

$$(\vec{\ })^2\,dv^2.$$

156. Courbure d'une courbe sur une surface. — Considérons de nouveau une courbe (C), définie sur la surface (S) par u et v (et par suite $\overrightarrow{OM}$) fonctions d'un paramètre. La différentielle seconde de $\overrightarrow{OM}$ est (n° 141)

$$\overrightarrow{OM}) = \qquad \frac{}{\partial u\, \partial v} \; du\, dv +$$

$$\frac{}{\partial u} \cdot d^2 u \cdot \qquad)(\overrightarrow{OM})$$

Mais on a indiqué au n° 126 l'expression de $d^2(\overrightarrow{OM})$, sur une courbe, en fonction des vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{n}$, du rayon de courbure R et des différentielles de l'arc

$$= \vec{u} . d^2 s + \frac{1}{R} . \vec{n} .$$

En multipliant intérieurement cette différentielle par le vecteur normal $\vec{w}$ (n^{os} 144 et 152), on fait disparaître le terme en $d^2 s$ de la deuxième forme, les termes en $d^2 u$, $d^2 v$ de la première (n° 141) :

$$\frac{}{\partial u^2} \qquad \frac{}{\partial u\, \partial v} \quad du$$

Les crochets de la seconde ligne sont des fonctions scalaires de u et v; on les désigne habituellement par D, D′, D″ (on reviendra sur leurs diverses expressions); on a déjà indiqué l'expression de ds^2 (n° 152); enfin $\vec{w}$ est un vecteur de module H, de sorte que

$$\vec{w} . \vec{n} = \mathrm{H} . \cos \theta, \qquad \theta = (\vec{w}, \vec{n}) = (\vec{\mathrm{N}}, \vec{n}) ;$$

θ est l'angle de la normale à la surface, orientée dans le sens de $\vec{w}$, et de la normale à la courbe orientée dans le sens de la courbure; cet angle est défini au signe près et à un multiple de 2π près. Avec ces diverses notations la formule précédente donne l'expression

$$\cos \theta \qquad \frac{1}{\mathrm{H}} . \qquad 2\mathrm{D}' du . dv \cdot$$

on obtient en différentiant

Le second membre est une nouvelle expression de la forme différentielle qui, dans certains cas, peut être plus commode que la première. En l'explicitant on retrouve naturellement les expressions indiquées de D, D', D''. Dans ce nouveau mode de calcul, il ne s'introduit, à aucun stade, de termes en $d^2 u$, $d^2 v$.

On en déduit une nouvelle expression de la courbure [1]

$$\frac{\cos\theta}{R} \qquad \overrightarrow{dw}.d(\overrightarrow{OM}$$

La seconde forme différentielle s'introduit, non seulement dans le calcul de la courbure, mais encore lorsqu'on cherche *la position d'une courbe tracée sur la surface, passant par un point* A, *par rapport au plan tangent en* A. Effectivement, en exprimant sur une telle courbe u, v en fonction d'un paramètre t, nul au point A, on a d'après la formule de Taylor (n° 94)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \cdot \qquad dt \qquad {}_{A} \cdot \frac{t^2}{2} + t^2 . \vec{\varepsilon}.$$

La position par rapport au plan tangent est donnée par le signe du produit intérieur

$$\vec{w}.\overrightarrow{AM} = \vec{w}.(\overrightarrow{OM} -$$

$'_0$, v'_0 désignent les dérivées de u et v, par rapport à t pour $t = 0$.

Suivant que le produit $\vec{w}.\overrightarrow{AM}$ est positif ou négatif, la courbe est,

(1) Le calcul, fait pour $\vec{w}$, peut se répéter pour tout vecteur normal, en particulier pour un vecteur unitaire, supposé toutefois fonction continue de u, v

$$) = - d\vec{N}'.d(O$$

On en déduit encore

$$\vec{N}'.\vec{n} \quad = -\frac{\overrightarrow{dN'}.d(\overrightarrow{OM})}{ds^2}$$

un   lroite (D)

et son enveloppe, si elle existe, par

que cette é
: extérieurs

culaires à $\vec{a}$; il suffit donc   à a'.
comme le second, d'où la

$$a'.(a \wedge b') = -\vec{a}.(\vec{a'} \wedge \vec{b'}) = 0,$$

qui doit être une identité en v.

Si $\vec{b'}$ est nul, $\vec{b}$ est constant : on retrouve le cas de la surface conique (n° 147). Si $\vec{a'}$ et $\vec{a}$ sont parallèles, le vecteur $\vec{a}$ a une direction fixe (n° 89) : on retrouve le cas de la surface cylindrique (n° 146).

Ces deux cas étant exceptés, si la condition précédente est remplie, les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{a'}$ et $\vec{b'}$ sont dans un même plan (n° 33); c'est-à-dire que l'on a

Donc le vecteur $-\lambda(v)\vec{a'}(v)$ est parallèle à $\vec{a}$; il en est de
du vecteur

Soit E le point situé sur (D) correspondant à la valeur $u = -\lambda(v)$,

$$O\vec{E} = \vec{b}(v) - $$

La tangente $\vec{c'}(v)$ à la courbe (E), lieu du point E, étant parallèle

reste constamment parallèle au vecteur entre crochets qui est porté par la binormale à (E) (n° 122).

Supposons qu'on ait pris pour paramètre v l'arc $\sigma = \widehat{E_0 E}$ de l'arête de rebroussement (E); $\overrightarrow{c'}(\sigma)$ est le vecteur unitaire $\vec{u}$ sur la tangente à (E) et μ est la distance $\overline{EM}$. Désignons par R et $\vec{n}$ le rayon de courbure et le vecteur unitaire sur la normale principale à (E); on a

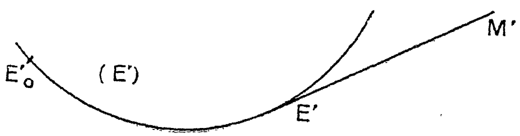
$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\sigma} = \vec{c}'(\sigma) + \mu \vec{c}''(\sigma) = \vec{u} + \frac{\mu}{R}\vec{n},$$

d'où

et *le* ds^2 *de la surface développable est*

On obtient le même ds^2 en définissant de la manière suivante

Fig. 75.



les coordonnées curvilignes d'un point M' d'un plan : soit (E') une courbe plane, dont nous désignerons par σ l'arc $\widehat{E'_0 E'}$, telle que son rayon de courbure soit la même fonction $R(\sigma)$ que pour la courbe (E) de l'espace ([1]); soit μ la distance $\overline{E'M'}$ comptée sur la tangente en E' à (E') dans le sens de σ croissant; nous prendrons σ et μ comme coordonnées de M'.

La correspondance, ainsi réalisée entre le point M de la surface développable et le point M' de la portion du plan balayée par les tangentes à (E'), conserve les distances et les angles; de sorte que

([1]) D'après la fin du n° 166, (E') est déterminée à un déplacement près.

Précisons comment sont situées ces arêtes de rebroussement. Il faut chercher une valeur de μ telle que, φ vérifiant la condition précédente, $\vec{b'} + \mu\vec{a'}$ soit parallèle à $\vec{a}$. Or $\vec{b'} + \mu\vec{a'}$ étant exprimée en fonction de $\vec{U}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, il faut que le terme en $\vec{U}$ disparaisse, puisque $\vec{a}$ est parallèle au plan $(\vec{N}, \vec{B})$; on en déduit

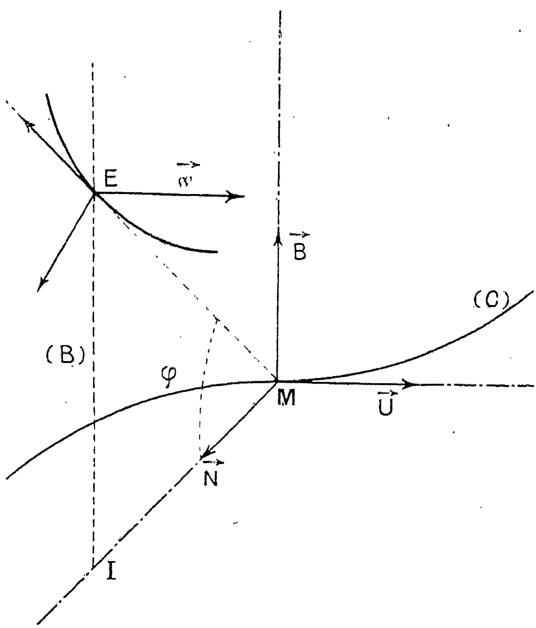
et l'arête de rebroussement est définie par

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM} + R.\vec{N} + R.\operatorname{tang}\varphi.\vec{B} = \overrightarrow{OI} + R.\operatorname{tang}\varphi.\vec{B};$$

en appelant I le centre de courbure de (C) au point **M**. Donc :

Le point de contact E *d'une normale en* M *avec son enveloppe*

Fig. 76.



est sur la droite (B) *menée par le centre de courbure* I, *parallèlement à la binormale*. C'est-à-dire que *toutes les développées de* (C)

179. Moment relatif de deux vecteurs. — Dans l'expression du moment par rapport à un axe, nous avons effectivement remplacé l'axe par le vecteur unitaire qui le caractérise. On obtient une généralisation naturelle, en substituant à ce vecteur unitaire un vecteur glissant quelconque. On est ainsi conduit à la définition suivante :

Soient deux vecteurs glissants $\vec{a}$, $\vec{b}$ *portés par des droites* (D), (Δ), *et soient* A, B *des points quelconques de ces droites, on appelle moment relatif des deux vecteurs le produit mixte*

$$\vec{a}.(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{b}) = \overrightarrow{AB}.(\vec{b} \wedge \vec{a}) = \vec{b}.(\vec{a} \wedge \overrightarrow{AB}) = \vec{b}.(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{a})$$

Ces diverses expressions montrent que le moment relatif des deux vecteurs est indépendant de la position des points A et B sur les lignes d'action de ces vecteurs et aussi de l'ordre adopté pour ces vecteurs. On en déduit facilement l'expression du moment en fonction des composantes et coordonnées, sous forme de déterminant, ou encore son interprétation géométrique comme volume d'un parallélépipède.

Le moment relatif est un scalaire axial si les deux vecteurs sont tous deux polaires ou axiaux; il est polaire si l'un des vecteurs est axial et l'autre polaire. Ses dimensions sont le produit d'une longueur par les dimensions des deux vecteurs.

Remarquons que, le moment relatif étant déterminé en même temps que les deux vecteurs glissants, on doit pouvoir l'exprimer en fonction de ces vecteurs et de leurs moments par rapport à un point O, soit encore en fonction de leurs « coordonnées » par rapport à trois axes Ox, y, z. Effectivement introduisons explicitement le point O dans la seconde forme du produit mixte, on obtient :

$$\text{Mom. rel.} = \overrightarrow{BA}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\ (\vec{a} \wedge$$
$$= \overrightarrow{OA}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) - \overrightarrow{OB}.(\vec{a} \wedge$$

Mais on peut interpréter chacun de ces produits :

$$\overrightarrow{OA}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{a}) = \vec{b}.\,\text{Mom}_O\,\vec{a}$$
$$-\overrightarrow{OB}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}.(\overrightarrow{OB} \wedge \vec{b}) = \vec{a}.\,\text{Mom}_O\,\vec{b}.$$

Finalement, l'expression du moment relatif est :

$$\vec{a}.\mathrm{Mom}_0\,\vec{b} + \vec{b}.\mathrm{Mom}_0\,\vec{a} = \mathrm{XL'} + \mathrm{YM'} + \mathrm{ZN'} + \mathrm{X'L} + \mathrm{Y'M} + \mathrm{Z'N},$$

(X, Y, Z, L, M, N) et (X′, Y′, Z′, L′, M′, N′) étant respectivement les coordonnées des deux vecteurs glissants. Sous cette forme on retrouve les propriétés énoncées et notamment le rôle symétrique des deux vecteurs.

En tenant compte des deux conditions :

$$\vec{a}.\mathrm{Mom}_0\,\vec{a} = 0, \qquad \vec{b}.\mathrm{Mom}_0\,\vec{b} = 0,$$

on peut encore écrire l'expression du moment relatif sous la forme

ou

$$(\mathrm{X}+\mathrm{X'})(\mathrm{L}+\mathrm{L'}) + (\mathrm{Y}+\mathrm{Y'}).(\mathrm{M}+\mathrm{M'}) + (\mathrm{Z}+\mathrm{Z'})(\mathrm{N}+\mathrm{N'}).$$

180. **Vecteurs glissants coplanaires.** — En reprenant la condition énoncée au n° 33 pour l'annulation d'un produit mixte, on obtient la condition pour que deux vecteurs glissants non nuls aient un moment relatif nul. Il faut et il suffit que les deux vecteurs soient dans un même plan (parallèles ou concourants). Effectivement, il faut et il suffit, ou bien que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ soit nul, auquel cas les vecteurs sont concourants, ou bien que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ soient dans un même plan. Inversement, si $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont dans un même plan, il en est de même de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

En particulier, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur ait un moment nul par rapport à un axe Δ est que cet axe et ce vecteur soient concourants ou parallèles.*

Remarquons encore que la condition qu'on vient d'obtenir fournit, dans l'étude géométrique des droites, un moyen d'écrire que deux droites sont dans un plan. Il faut et il suffit que le moment relatif de deux vecteurs portés par ces droites soit nul :

$$\vec{a}.\overrightarrow{m'} + \vec{a'}.\overrightarrow{m} = 0;$$

ce qui s'exprime, en fonction des coordonnées de Plücker des deux

Les composantes L_P, M_P, N_P du vecteur lié $\overrightarrow{PG}$, sur trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz en fonction des coordonnées x, y, z du point P et des composantes (X, Y, Z) de $\vec{\mathcal{R}}$ (L, M, N), et de $\overrightarrow{\mathcal{M}_0}$ sont :

$$L_P = L - (y.Z - z.Y),$$
$$M_P = M - (z.X - x.Z),$$
$$N_P = N - (x.Y - y.X).$$

tion $\overline{OG} - II'$ perpendiculaire à $\overline{OI}$ entraîne

$$\overrightarrow{II'} - \overrightarrow{OG} = -b.\vec{k} + c.\vec{j} = \quad \rightarrow$$

La condition $JJ' - OG$ perpendiculaire à OJ entraîne

$$\overrightarrow{JJ'} - \overrightarrow{OG} = +a\vec{k} - c'\vec{i} = -\vec{j} \wedge (a\vec{i} + c'k$$

Mais la condition $\overrightarrow{II'} - \overrightarrow{JJ'}$ perpendiculaire à $\vec{IJ}$ entraîne

$$c' = c.$$

Donc on peut écrire

$$\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OI} \wedge \vec{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{JJ'} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OJ} \wedge .$$

en posant

$$\vec{\mathcal{R}} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Par conséquent $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{II'}$ et $\overrightarrow{JJ'}$ sont les moments d'un système de vecteurs qui admettrait $\vec{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{OG}$ comme éléments de réduction au point O.

Ceci acquis, le vecteur $\overrightarrow{KK'}$ correspondant à K est défini par ses projections orthogonales sur les trois droites formant un véritable trièdre KO, KI, KJ (n° 35 *bis*); elles sont égales aux projections respectives des vecteurs $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{II'}$, $\overrightarrow{JJ'}$. Par suite $\overrightarrow{KK'}$ est égal au vecteur

$$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OK} \wedge \vec{\mathcal{R}},$$

qui a les mêmes projections d'après la propriété directe des champs de moments.

Enfin pour un point P de l'espace, le vecteur correspondant PP′ est défini par ses projections orthogonales sur trois des quatre droites PO, PI, PJ, PK et il coïncide par suite avec le vecteur

$$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\mathcal{R}},$$

qui a les mêmes projections d'après la propriété directe des champs de moments.

On aurait pu faire la même démonstration à partir de trois *points* O, I, J *quelconques, mais non en ligne droite.* Les moments en ces trois points caractérisent donc tout le champ des moments.

Cette somme est un scalaire; nous allons d'abord montrer qu'elle ne dépend que des résultantes générales et moments résultants des systèmes par rapport à un point O. Soient effectivement $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_i, \ldots$ les vecteurs de (Σ), et $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ des points pris sur leurs lignes d'action respectives. Soient de même $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_j, \ldots$ les vecteurs de (Σ') passant par $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots$. Le moment résultant des deux systèmes est la somme

étendue à tous les couples possibles d'indices i, j. Mais en remplaçant le moment relatif de deux vecteurs par son expression du n° 179, la somme s'écrit :

$$= (\Sigma \vec{f}_i).(\Sigma \operatorname{Mom} \vec{g}_j)$$

C'est bien le résultat annoncé. La définition du moment relatif montre en outre que l'expression obtenue

est indépendante du centre des moments et constitue donc un *invariant simultané des deux systèmes de vecteurs*. On le vérifie sans peine directement; on a en effet

$$' \wedge \vec{\mathcal{R}}')$$

les deux produits mixtes se détruisant.

L'expression du moment relatif des deux systèmes en fonction de leurs coordonnées est

$$XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N.$$

En adoptant l'une quelconque de ces diverses expressions du moment et en le représentant par la notation abrégée $(\Sigma).(\Sigma')$, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes [analogues à celles du

qu'elle ait des solutions, il faut et il suffit que le second membre soit perpendiculaire à $\vec{\mathcal{R}}$; c'est-à-dire que

Dans cette équation, aucun des scalaires n'est nul, on en déduit pour k une valeur finie et non nulle, égale d'ailleurs au quotient des « invariants » du système. Cette valeur acquise, l'équation en $\overrightarrow{OI}$ nous donne pour lieu de I une droite parallèle à $\vec{\mathcal{R}}$. En tout point de cette droite, $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{\mathcal{R}}$ gardent des valeurs constantes : ce sont des vecteurs parallèles, de rapport k.

En résumé, la constante k et l'axe central (Δ) sont définis par les équations

$$(\vec{\mathcal{R}})^2$$

$$\overrightarrow{OI} \wedge \vec{\mathcal{R}}$$

En résolvant la division géométrique (n° 35), on peut encore représenter l'axe (Δ), lieu de I, sous forme paramétrique (n° 77) :

$$\frac{\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}}{(\vec{\mathcal{R}})^2} \qquad (\vec{\mathcal{R}})^2$$

En coordonnées cartésiennes ces diverses expressions et équations deviennent

$$k = \qquad + M.Y + N.Z$$

$$\lambda.X,$$

$$-xZ = M - k.Y$$

$$-yX = N - k.Z \qquad \frac{XM - YL}{X^2 + Y^2 + Z^2} + \lambda.Z.$$

L'invariant $\vec{\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$ est le produit de la mesure de $\vec{\mathcal{R}}$ par la projection de $\vec{\mathfrak{M}}_0$ sur $\vec{\mathcal{R}}$. — *Donc la projection de* $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$ *sur* $\vec{\mathcal{R}}$, *et par con-*

Si $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}_0$, $\vec{\mathcal{R}}'$ et $\vec{\mathcal{M}}'_0$ sont les éléments de réduction des systèmes (Σ), (Σ') par rapport à un point O, les éléments de réduction d'un système quelconque du faisceau sont

Il y a en général deux valeurs du rapport $\lambda : \lambda'$ (valeurs qui peuvent être imaginaires) telles que les systèmes correspondants du faisceau soient dégénérés. On obtient en effet ces valeurs en annulant l'invariant du système; d'où

$$(\lambda.\vec{\mathcal{R}}+\lambda'.\vec{\mathcal{R}}').(\lambda.$$

ou

Cette équation est du second degré par rapport au quotient $\lambda : \lambda$, elle définit bien, en général, deux valeurs de quotient qui peuvent être imaginaires. Les coefficients de cette équation sont les moments relatifs des systèmes par rapport à eux-mêmes (invariants) et de l'un par rapport à l'autre.

Sans entrer dans le détail, indiquons seulement le cas où cette équation est identiquement vérifiée, c'est-à-dire où *tous les systèmes du faisceau sont dégénérés :* il faut et il suffit que les deux systèmes soient dégénérés et que leur moment relatif soit nul, ce qui donne les diverses circonstances suivantes :

(Σ), (Σ') vecteurs uniques *dans un même plan;*
(Σ) couple, (Σ') vecteur unique perpendiculaire au moment de (Σ);
(Σ) et (Σ') couples (tous les systèmes sont alors des couples);
(Σ) système nul, (Σ') dégénéré quelconque.

203. **Réduction d'un système à deux vecteurs.** — La notion de faisceau linéaire de systèmes conduit à un nouveau mode de réduction :

Soit un système de vecteurs, non dégénéré $\left(\vec{\mathcal{R}} : \vec{\mathcal{M}} \text{ non nul}\right)$, *on peut toujours trouver un système équivalent formé de deux vecteurs (non dans un même plan) dont l'un est porté par une droite arbitraire* (D), *à condition toutefois que* (D) *ne soit ni une droite de moment nul, ni parallèle à l'axe central.*

vées de $\vec{r}$ et $\vec{p}$ par rapport à φ sont leurs produits extérieurs par $\vec{k}$

$$dt \quad = \left[x.(\vec{k} \wedge \vec{r}) + y.(\vec{k} \qquad\qquad = \vec{k} \wedge (\vec{r}x + \vec{p}.y)\frac{d\varphi}{dt}.$$

On peut ajouter, dans la dernière parenthèse, le terme $\vec{k}.z$, dont le produit extérieur par $\vec{k}$ est nul; elle devient alors égale à $\overrightarrow{OM}$, d'où l'expression de la vitesse

La vitesse de M *est le moment par rapport à* M *d'un vecteur* $\vec{\omega}$, porté par Oz et dont la mesure sur cet axe est $\frac{d\varphi}{dt}$. *Ce vecteur* $\vec{\omega}$, devant être porté par une droite (Δ) donnée, représente une *grandeur vectorielle glissante;* cette grandeur est « *axiale* », puisqu'un changement d'orientation de l'espace changerait le sens dans le plan perpendiculaire à Oz, donc le signe de φ'; *on l'appelle la* « *rotation du solide* »; *sa mesure* $\frac{d\varphi}{dt}$ *se nomme la* « *vitesse angulaire* ».

La vitesse d'un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ se déduit immédiatement des vitesses de P et Q; on obtient

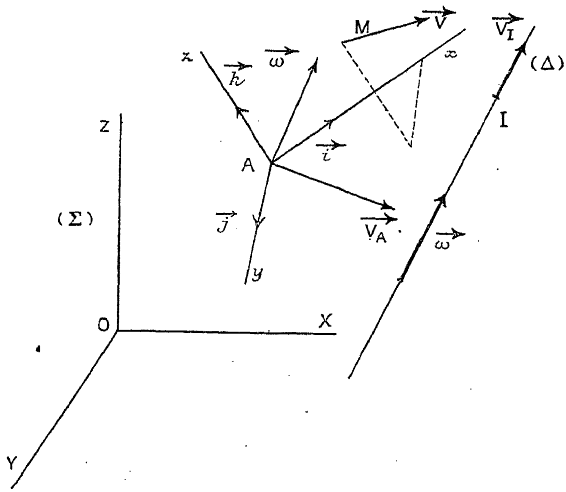
c'est *le produit extérieur de la rotation par le vecteur.*

Si la vitesse angulaire est constante, il en est de même du module de la vitesse de tout point M : ce point parcourt une circonférence d'un mouvement uniforme. On dit dans ce cas que *le mouvement de rotation est uniforme.*

Comme pour la translation, dans tout mouvement de rotation, il y a, à chaque instant t_0, un et un seul mouvement de rotation uniforme tangent, défini par $\varphi' = \varphi'_0$ (φ'_0 vitesse angulaire à l'instant t_0).

Cherchons à exprimer les dérivées de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par leurs composantes sur Ax, Ay, Az. *Chacun des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étant de module constant, sa dérivée lui est perpendiculaire* (n° 90) et par suite a une composante nulle sur l'axe correspondant. D'autre part, les produits

Fig. 90.



intérieurs des vecteurs pris deux à deux étant nuls, on obtient en dérivant

$$\vec{j}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}+\vec{k}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt}=0, \qquad \vec{k}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt}+\vec{i}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}=0, \qquad \vec{i}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt}+\vec{j}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt}=0.$$

La projection de la vitesse d'un des vecteurs sur un des deux autres est égale et de signe contraire à la projection de la vitesse de ce second vecteur sur le premier (¹).

Les composantes des dérivées s'expriment donc seulement en fonc-

(¹) Cette propriété est vraie pour tout couple de vecteurs rectangulaires de même module; *voir* un calcul analogue fait pour la torsion (n° 124).

tion de trois scalaires qui sont

$$\vec{} \; d\vec{k}$$

et l'on a

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = r.\vec{j} - q.\vec{k} = r.(\vec{k} \wedge \vec{i}) + q.(\vec{j} \wedge \vec{i}),$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = p.\vec{k} - r.\vec{i} = p.(\vec{i} \wedge \vec{j}) + r.(\vec{k} \wedge \vec{j}),$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \quad \vec{i} - p.\vec{j} = q.(\vec{j} \wedge \vec{k}) + p.(\vec{i} \wedge \vec{k}).$$

En portant dans la dérivée de $\overrightarrow{OM}$, on obtient

$$+ y.(p.\vec{i} \wedge \vec{j} + r.\vec{k} \wedge \vec{j}) + z.(q.\vec{j} \wedge$$

$$\overrightarrow{OA}) + (p.\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}) \wedge (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

ce que l'on peut encore écrire ([1])

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{v}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\omega}.$$

([1]) *a*) La démonstration du texte traduit en langage vectoriel la démonstration donnée habituellement avec les coordonnées cartésiennes. On peut lui donner une forme légèrement différente en utilisant les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{r} = \vec{i}$, et remplaçant $\vec{j}$ ou $\vec{p}$ par le produit extérieur $\vec{k} \wedge \vec{r}$; on peut même prendre $\vec{r}$ perpendiculaire à la direction de la vitesse de $\vec{k}$ à l'instant t.

b) On peut encore écrire

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM};$$

comme $\overrightarrow{AM}$ est de module constant, sa dérivée lui est perpendiculaire et par suite peut se mettre sous la forme $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$. Reste à montrer qu'on peut trouver $\vec{\omega}$ indé-

Le vecteur $\vec{\omega} = \vec{i}p + \vec{j}q + \vec{k}r$ s'écrit, en explicitant,

$$\cdot \frac{}{dt} \qquad \vec{i}.\frac{d\vec{k}}{dt}\Big).\vec{j} \qquad \cdot \frac{}{dt}\Big) \cdot$$

son interprétation montre qu'il est indépendant des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ choisis pour le définir; on l'appelle la *rotation instantanée* du corps (S), à l'instant t. Le second vecteur $\vec{v}_A$ est la vitesse de A.

La vitesse à l'instant t d'un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ lié à (S) est égale au produit de la rotation instantanée par $\overrightarrow{PQ}$:

$$\text{vitesse}\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ},$$

car, dans la différence des vitesses de Q et P, le vecteur $\vec{v}_A$, qui est commun, disparaît (¹).

L'identification de $\vec{v}$ avec un moment constitue la propriété signalée au n° 214 et dont nous avons déjà rencontré trois cas particuliers :

(¹) Cette formule contient notamment comme cas particulier les expressions des dérivées

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}, \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

dont on peut rapprocher les expressions de p, q, r :

$$p = \vec{\omega}.\vec{i}, \qquad q = \vec{\omega}.\vec{j}, \qquad r = \vec{\omega}.\vec{k}.$$

En résolvant les divisions géométriques par rapport à $\vec{\omega}$ (n° 35), on a

$$\vec{\omega} = \vec{i} \wedge \frac{d\vec{i}}{dt} \qquad \vec{\omega} = \vec{j} \wedge \frac{d\vec{j}}{dt} \qquad \vec{\omega} = \vec{k} \wedge \frac{d\vec{k}}{dt}$$

d'où

$$\vec{\omega} = \vec{i} \wedge \frac{d\vec{i}}{dt} + \vec{j} \wedge \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{k} \wedge \frac{d\vec{k}}{dt},$$

qui permet inversement de calculer $\vec{\omega}$ quand on connaît les dérivées.

c'est-à-dire en remplaçant les dérivées par leurs valeurs données par les formules de Frenet,

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{T}.\vec{u} + \frac{1}{R}.\vec{b}.$$

Ce calcul donne l'expression de la rotation en fonction de la courbure et de la torsion, mais inversement, on peut considérer qu'il définit la courbure et la torsion en M comme les vitesses angulaires du trièdre de Frenet autour de la binormale et de la tangente.

Les deux invariants du système vitesse de (S) ont pour valeurs

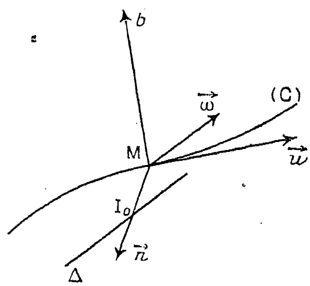
$$\overline{R^2} + \overline{T^2},$$

et leur rapport est

$$R^2.T$$

Le système n'est donc dégénéré (rotation ou translation tangentes) qu'aux points de (C) où la torsion est nulle. Il est constamment dégénéré si (C) est une courbe plane et seulement dans ce cas.

L'axe instantané de rotation et de glissement est donné par l'équa-



tion, définissant le lieu de I (n° 221 ou n° 200),

$$\vec{MI} \wedge \left(-\frac{1}{T}.\vec{u} + \frac{1}{R}.\vec{b}\right) = \vec{u} + \frac{R^2.T}{R^2 + T^2}.\vec{\omega} = \vec{\imath} \qquad .\vec{b}.$$

ou encore sous forme paramétrique

$$+ \lambda\vec{\omega} = \qquad \frac{1}{\ } + \frac{1}{\ } \qquad \frac{RT^2}{R^2 + T^2}\vec{n} + \lambda\vec{\omega},$$

de composition des vitesses aux vitesses de $\vec{v}_r$,

$$\text{Vit}_a(\vec{v}_r) = \text{Vit}_r(\vec{v}_r) + \text{Vit}_e(\vec{v}_r).$$

Le premier terme est $\vec{\gamma}_r$; quant au second, vitesse d'entraînement d'un vecteur, il est égal (n° 219) au produit extérieur de la rotation instantanée $\vec{\omega}$ de (S) par le vecteur

$$\text{Vit}_a(\vec{v}_r) = \vec{\gamma}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r.$$

Pour évaluer enfin la vitesse absolue de $\vec{v}_e$, remarquons que $\vec{v}_e - \vec{v}'_e$ est la vitesse d'entraînement du vecteur $\overrightarrow{m_0 m_t}$; cette vitesse, nulle à l'instant t_0, est, d'après la règle rappelée, égale à l'instant t à

$$\vec{v}_e - \vec{v}'_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{m_0 m_t} \qquad (\vec{\omega} \text{ à l'instant } t),$$

d'où en dérivant

$$\wedge \qquad \wedge$$

Prenons cette égalité à l'instant t_0; $\overrightarrow{m_0 m_t}$ est nul, la vitesse absolue de $\overrightarrow{m_0 m_t}$ (différence des vitesses absolues de m_t et m_0) est la vitesse relative de M :

$$\text{Vit}_a(\vec{v}_e) = \vec{\gamma}_e + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r.$$

En remplaçant dans l'égalité primitive les divers termes par ces valeurs on obtient (¹)

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + 2 . \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r.$$

(¹) *a*) Une démonstration analogue est donnée par M. Painlevé dans son Cours de l'École Polytechnique, en considérant toutefois les vitesses pour deux instants infiniment voisins et en passant à la limite.

b) On peut donner à la démonstration un support peut-être plus tangible, mais qui cache un peu l'origine des divers termes, en écrivant la vitesse absolue sous la forme

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}, \qquad \vec{V}_A \text{ vitesse d'un point A de S},$$

et dérivant.

c) Avec l'introduction des paramètres λ, μ de la note du numéro précédent, on a

Cette relation qui donne la composition des accélérations est connue sous le nom de « théorème de Coriolis », le terme

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

se nomme accélération de Coriolis ou *accélération complémentaire.*

A un instant donné ce terme $\vec{\gamma}_c$ n'est nul que si l'un des vecteurs $\vec{\omega}$ ou $\vec{v}_r$ est nul, ou s'ils sont parallèles. Par suite il n'est constamment nul dans le cours d'un mouvement que :

1° si le point est en repos relatif, auquel cas il n'y a plus à proprement parler composition des vitesses ;

2° si le mouvement d'entraînement est une translation [$\vec{\omega}$ constamment nul, (n° 222)] ;

3° si $\vec{v}_r$ est constamment parallèle à $\vec{\omega}$ [1].

$$\frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2} = | a''_{\lambda^2} . \lambda'^2 + \vec{x}'_{\lambda} . \lambda''$$

Les deux premiers termes, dérivées secondes de OM, en supposant λ ou μ seul variable, sont les accélérations relative et d'entraînement. Le dernier terme peut s'écrire

c'est le double de la vitesse d'entraînement du vecteur $\vec{v}_r$; il est donc égal à

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r.$$

[1] Les lois de composition des vitesses et des accélérations peuvent encore s'obtenir par une méthode analogue à celle que nous avons suivie au n° 219 pour établir la distribution des vitesses dans un solide. Caractérisons les deux solides (Σ) et (S) par des trièdres OX, Y, Z et Ax, y, z; soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires de ce dernier trièdre et x, y, z les coordonnées (variables) de M par rapport à (S)

$$\vec{OM} = \overrightarrow{OA}\cdot$$

d'où

$$\overline{dt} \qquad \frac{d\vec{j}}{} y + \frac{d\vec{k}}{dt} \qquad \vec{j}\cdot\frac{dy}{dt} + \vec{k}\cdot\frac{dz}{dt}$$

Le premier membre est la vitesse absolue du point M; le premier crochet du

Le système définissant la vitesse de (S) par rapport à (Σ) a donc pour éléments de réduction au point A

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\omega} = \varphi'.\vec{k} + \theta'.\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \psi'.\vec{\mathrm{K}}; \qquad \overrightarrow{\mathfrak{M}_{\mathrm{A}}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} = \frac{d\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)}{dt}.$$

On retrouve l'expression indiquée dans la note (c) du n° 219.

229. Décomposition de la vitesse d'un corps solide. — Inversement considérons un solide (S_1) mobile par rapport à (Σ) et sa vitesse (σ) à un instant t. Décomposons (σ) en une somme de systèmes

et imaginons des corps solides intermédiaires (S_2), (S_3), ..., (S_n) tels que la vitesse de (S_1) par rapport à (S_2) soit (σ_1), celle de (S_2) par rapport à (S_3) soit (σ_2), ..., la vitesse de (S_n) par rapport à (Σ) est nécessairement (σ_n). *En ne s'occupant que des vitesses à l'instant t*, ou encore des mouvements tangents, on dit que le *mouvement de* (S) *par rapport à* (Σ) *est la résultante des mouvements intermédiaires.* On peut d'ailleurs prendre pour ces mouvements intermédiaires des mouvements simples : mouvement hélicoïdal, ou de rotation, ou de translation, uniformes.

C'est ainsi qu'en interprétant l'expression donnée pour la vitesse (σ) d'un solide (S) (n° 219)

et $\quad : i.p\cdot$

on dit que le mouvement de (S) est la résultante d'une translation égale à la vitesse de A et de trois rotations, de vitesse angulaire p autour de Ax, parallèle à $\vec{i}$; de vitesse angulaire q autour de Ay, parallèle à $\vec{j}$; de vitesse angulaire r autour de Az, parallèle à $\vec{k}$.

Cette notion conduit à des interprétations cinématiques des propriétés énoncées au Chapitre précédent sur la réduction des systèmes de vecteurs glissants.

Pour une translation le système (σ), ayant une résultante générale nulle (n° 222), est équivalent à un couple; *une translation*

233. Condition de viration de deux surfaces réglées. — Considérons deux surfaces réglées s_1 et s_2, définies dans des solides (S_1) et (S_2) comme les hodographes des fonctions de u_1, λ d'une part, u_2, λ d'autre part (n° 149) :

$$= \Lambda\, i_1$$

$$= 1\,;$$

$$= \overrightarrow{B i_1}$$

$$B\vec{m}_2 = \quad {}_2) + \lambda\,.\,\vec{a}_2(u_2)$$

Si l'on établit une correspondance entre u_1 et u_2 en les prenant tous deux fonctions d'une même variable t

on établit par le fait une correspondance entre les divers points des deux surfaces. A une même valeur de t et à diverses valeurs de λ correspondent ainsi dans s_1 et dans s_2 des points de deux génératrices $i_1 z_1$ et $i_2 z_2$ formant des figures égales, car les vecteurs $\vec{a}_1(u)$ et $\vec{a}_2(u)$ étant unitaires, on a, pour un même t et un même λ,

Ceci posé, on peut concevoir un mouvement de s_2 par rapport à s_1 [et par suite de (S_2) par rapport à (S_1)] tel que, à chaque instant t, le point i_2 et la génératrice $i_2 z_2$ viennent coïncider avec i_1 et $i_1 z_1$. Nous allons chercher la condition pour que ce mouvement constitue une « viration ».

Si l'on considère, pour des génératrices correspondantes, les vecteurs $\left(\vec{V}_2, \vec{W}_2\right)$ et $\left(\vec{V}_1, \vec{W}_1\right)$ définis au numéro précédent, ils sont respectivement égaux à

$$\overline{\quad dt \quad} \qquad \wedge\, a_2(u_2)\Big]\frac{du_2}{dt}\,;$$

Ces vecteurs doivent pouvoir venir en coïncidence, à l'instant t, en

surfaces et l'on prend sur les génératrices $i_1 z_1$ et $i_2 z_2$ des vecteurs unitaires $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ qui deviendraient opposés dans cette coïncidence.

Les égalités précédentes sont manifestement vérifiées. Remarquons que dans la coïncidence $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont aussi opposés; dans la viration il y aura donc en quelque sorte retournement d'une des surfaces : les surfaces égales se trouveront de part et d'autre de leurs plans tangents communs.

235. Viration des surfaces développables. — Étant donnée une correspondance entre deux surfaces réglées s_1 et s_2 susceptibles d'engendrer une viration, si pour une génératrice de la surface s_2 le plan tangent est le même en tout point, la même circonstance se produit pour la génératrice correspondante de s_1.

Si un point est singulier sur s_2, le vecteur normal s'y annule, le point correspondant est également singulier sur s_1; on ne peut plus rien dire de général sur les plans tangents en ces points singuliers.

Par conséquent, si *l'une des surfaces* s_1 *est développable* (n° 167) *il en est de même de l'autre* s_2 *et leurs arêtes de rebroussement se correspondent. Dans la viration ces arêtes sont constamment tangentes en leur point commun* i, leur tangente est d'ailleurs la génératrice commune aux surfaces, qui est l'axe instantané du mouvement.

Précisons la correspondance à réaliser. Dans les équations du n° 233, on peut prendre pour i_1 et i_2 les points correspondants sur les arêtes de rebroussement; dans ces conditions $\vec{b}'_1$ et $\vec{b}'_2$, vecteurs tangents à ces arêtes, sont respectivement parallèles à $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$, de sorte que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ s'annulent; il ne subsiste que la première condition indiquée pour des surfaces réglées non développables

$$|\overrightarrow{da_1}| = |\overrightarrow{da_2}|.$$

La correspondance ainsi définie peut être réalisée, soit entre deux développables, soit entre un cône et une développable, soit entre deux cônes. Si s_1 est développable, $\vec{a}_1$ est le vecteur unitaire porté par la tangente à l'arête de rebroussement, le module de sa différentielle est,

Nous appellerons *trièdre supplémentaire* de T, et nous désignerons par T*, le trièdre OX, Y, Z défini par les trois vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ vérifiant les égalités

(1) $\vec{J}\ \vec{\cdot}$ $\qquad$ $\vec{J}$

Le vecteur $\vec{I}$ étant perpendiculaire à $\vec{j}$ et $\vec{k}$ est parallèle à leur produit extérieur, de sorte que

$$\vec{j} \wedge \vec{k}$$

en transportant dans la première équation, on obtient la valeur de λ :

Le calcul de $\vec{J}$ et $\vec{K}$ est analogue et les valeurs explicites de $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ sont

$$\vec{J}$$

Les formules (1) montrent immédiatement que les relations entre deux trièdres supplémentaires sont réciproques : *le supplémentaire de* T* *est* T; de sorte qu'en appelant Δ le déterminant de T*, on a

Le déterminant Δ *l'inverse de* δ. Ceci résulte, par exemple, de la suite d'égalités

$$\Delta.\vec{i} = \vec{J} \wedge \vec{K} = \frac{1}{\delta}\vec{J} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \frac{1}{\delta}\left[\vec{i}.(\vec{J}.\vec{j}) - \vec{j}.(\vec{J}.\vec{i})\right] = \frac{1}{\delta}.\vec{i}.$$

Remarquons que *les arêtes des trièdres* T *et* T* *forment des trièdres supplémentaires au sens ordinaire de la Géométrie.* Pour qu'un trièdre soit égal à son trièdre supplémentaire, il faut et il suffit qu'il soit trirectangle et que les vecteurs unitaires choisis sur ses axes aient l'unité pour module commun.

2*. Coordonnées contravariantes d'un vecteur. — Considérons deux trièdres supplémentaires T et T*. *Nous appellerons coordonnées contravariantes d'un vecteur* $\vec{a}$, *ses composantes* (n° 14) x, y, z *et* X, Y, Z *relative-*

En particulier, le carré d'un vecteur (n° 21) a pour valeur

Nous démontrons ainsi à nouveau que l'expression

$$x.\mathrm{X}+y.\mathrm{Y}+z.\mathrm{Z}$$

reste invariante lorsqu'on effectue des substitutions contravariantes sur x, y, z et X, Y, Z; cette expression est en effet égale au produit intérieur des vecteurs qui ont respectivement pour composantes x, y, z et X, Y, Z par rapport à deux trièdres supplémentaires T et T*.

Produit extérieur. — Formons le produit extérieur de deux seconds membres, on obtient

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2).(\vec{j} \wedge \vec{k})$$

$$(\vec{k} \wedge \vec{i}) + \qquad (\vec{\ }\ \vec{\ })$$

Mais d'après les formules (1′) les produits extérieurs des $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ s'expriment au moyen de $\vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}, \vec{\mathrm{K}}$; donc

$$(3)\quad \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \delta(y_1 z_2 - z_1 y_2).\vec{\mathrm{I}} + \delta(z_1 x_2 - x_1 z_2).\vec{\mathrm{J}} + \delta(x_1 y_2 - y_1 x_2).\vec{\mathrm{K}}.$$

On obtient de même, en faisant les produits de deux troisièmes membres,

Les composantes, par rapport à un trièdre, du produit extérieur de deux vecteurs sont égales au produit par le déterminant du trièdre supplémentaire des mineurs du tableau formé avec les composantes des deux vecteurs par rapport à ce trièdre supplémentaire.

Produit mixte. — Pour chercher l'expression du produit

$$\vec{a}_1.(\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3),$$

supposons les vecteurs $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ définis par leurs composantes relatives au trièdre T: la formule (3) donne les composantes de leur produit extérieur par rapport au trièdre supplémentaire T*; pour pouvoir appliquer l'expression (2) du produit intérieur il suffit donc de définir aussi $\vec{a}_1$ par ses composantes relativement à T. *Le produit mixte est égal au produit du déterminant des*

des vecteurs

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \rho\vec{p}\sin\theta,\\
\vec{v} &= \rho\left(\vec{r}\cos\theta - \vec{k}\sin\theta\right) = \rho\left(\vec{p}\wedge\vec{R}\right),\\
\vec{w} &= \vec{r}\sin\theta + \vec{k}\cos\theta \qquad = \vec{R}.
\end{aligned}$$

Ce trièdre est trirectangle mais *inverse*, son déterminant est

$$\delta = \vec{u}.\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right) = -\vec{v}.\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right) = -\rho^2\sin\theta\left(\vec{p}\wedge\vec{R}\right)^2,$$

d'où (n° 29)

Le trièdre supplémentaire est défini par les vecteurs

$$\vec{U} = \frac{1}{\delta}\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right) = - \qquad \rho^2\sin^2\theta$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\delta}\left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right) = \qquad \rho^2$$

$$\vec{W} = \frac{1}{\delta}\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right) = -\vec{p}\wedge\left(\vec{p}\wedge \qquad \vec{R} = \vec{w}.$$

Tous les points de Oz sont des pôles, θ et ρ y sont déterminés, φ est arbitraire; pour le point particulier O, ρ est seul déterminé, θ et φ sont arbitraires.

8*. Champ de scalaires et de vecteurs. — Supposons qu'à chaque point M d'une certaine région de l'espace on fasse correspondre un scalaire λ ou un vecteur $\vec{a}$. Ce scalaire ou ce vecteur sont fonctions des coordonnées (cartésiennes ou curvilignes) du point M. On dit qu'on a ainsi défini *un champ de scalaires ou un champ de vecteurs* (n° 143).

Un système de coordonnées curvilignes définit *a priori* trois champs de scalaires : u, v, w fonctions de la position de M. On en déduit aussi des champs de vecteurs constitués par les vecteurs unitaires du trièdre tangent en chaque point et du trièdre supplémentaire; de nouveaux champs de scalaires constitués par les déterminants de ces trièdres, etc.

Dans un champ de scalaires on appelle *surface de niveau* le lieu des points où le scalaire λ conserve une valeur constante

$$\lambda = \lambda_0.$$

Ce lieu, qui est en général une surface, peut devenir exceptionnellement un volume (si le scalaire est constant dans une certaine région de l'espace); une courbe (dans le système de coordonnées cylindriques, $\rho = 0$ représente l'axe Oz); ou encore des points isolés (dans le système de coordonnées sphériques, $\rho = 0$ représente le seul point origine).

D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{NM}$ est limité supérieurement en module

$$\left| \overrightarrow{NM} \right.$$

on peut supposer ε assez petit pour que cette limite soit inférieure à ε.

Le domaine décrit par M est donc intérieur à un parallélépipède de centre A et de côtés équipollents à

et il contient le parallélépipède de centre A et de côtés équipollents à

$$2\acute{u}_0(\varepsilon - H\varepsilon^2), \qquad \overrightarrow{}($$

Tandis que le volume ω est égal à $8\varepsilon^3$, le volume Ω est compris entre les volumes de ces deux parallélépipèdes; or ces volumes sont égaux aux produits mixtes des vecteurs. Le rapport des deux volumes vérifie donc la double inégalité

$$\overrightarrow{v_0}) \Big| \leqq \frac{\Omega}{\omega} \leqq (\qquad {}_0 . (v_0 \wedge$$

La limite cherchée est la valeur absolue du produit mixte

$$\text{limite } \frac{\Omega}{\omega} = \quad {}_0 . (v_0 \wedge$$

En appliquant au domaine (v) de l'espace du point m la méthode de calcul de l'intégrale de volume au moyen de trois intégrales simples, rappelée plus haut, on obtient pour I_V ou $\overrightarrow{A}_V$ les expressions :

$$\int\int\int_v \lambda . \quad {}_0 . (\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{w_0})\ du.dv.dw, \qquad \int\int\int_v \overrightarrow{a} . \left| \overrightarrow{u_0}(\overrightarrow{v_0} \wedge \right. \qquad v.dw.$$

On représente quelquefois une intégrale de volume avec un seul signe différentiel au lieu de trois :

on remplace parfois aussi les trois signes $\int$ par un seul. L'expression $d\omega$, abréviation de $dx.dy.dz$ ou encore de $\delta.du.dv.dw$, est appelée l'*élément de volume*.

10*. Intégrale de surface. — Considérons une portion (Σ) d'une surface S, délimitée par une courbe C, et placée dans un champ de scalaires ou un champ de vecteurs. On appelle *intégrale de surface étendue à* (Σ), *du champ de*

u et v doivent toujours croître en passant de leur limite inférieure à leur limite supérieure.

On représente quelquefois une intégrale de surface par la notation abrégée

en ne mettant même parfois qu'un seul signe $\int$. L'expression $d\sigma$, abréviation de $\mathrm{H}.du.dv$, est appelée *l'élément d'aire* de la surface S.

11*. Dérivée d'un champ suivant un vecteur. — Un champ de scalaires ou de vecteurs définit λ ou $\vec{a}$ comme fonction scalaire ou vectorielle des trois variables scalaires u, v, w, coordonnées curvilignes du point qui décrit le champ. On définit comme au n° 137 les dérivées partielles

La règle des fonctions composées s'établit comme pour le cas de deux variables (n° 138); si l'on considère un point A du champ et un « chemin » passant par A, défini par u, v, w fonctions d'un même paramètre, λ ou $\vec{a}$ sont aussi fonctions de ce paramètre; entre les différentielles on a la relation

$$d\lambda = \lambda'_u.du + \lambda'_v.dv \qquad\qquad d\vec{a} = \vec{a}'_u.du + \vec{a}'_v.dv + \vec{a}'_w.dw.$$

En particulier, la différentielle du vecteur $\overline{\mathrm{OM}}$, joignant le point fixe O au point variable M, est donnée par

$$d\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \vec{u}.du + \vec{v}.dv + \vec{w}.dw;$$

d'après les notations du n° 6*, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont les vecteurs du trièdre tangent au système de coordonnées, au point considéré.

Comme pour le cas de deux variables (n° 139) l'expression de la différentielle permet d'étudier l'effet du changement de coordonnées curvilignes. Soient u, v, w; u_1, v_1, w_1 deux systèmes de coordonnées curvilignes; ces coordonnées doivent s'exprimer les unes en fonction des autres et l'on a par exemple

$$u_1 = f(u, v, w), \qquad v_1 = g(u, v, w), \qquad w_1 = h(u, v, w);$$

et en différentiant

$$du_1 = f'_u.du + f'_v.dv + f'_w.dw,$$
$$dv_1 = g'_u.du + g'_v.dv + g'_w.dw,$$

Appelons S la substitution ([1]) linéaire (n° 3*) qui fait passer de du, dv, dw à du_1, dv_1, dw_1. L'expression de $d(\overrightarrow{OM})$ dans les deux systèmes de coordonnées étant

$$d(\overrightarrow{OM}) = \begin{cases} \vec{u}.du + \vec{v}.dv + \vec{w}.dw, \\ \vec{\ } \text{[illegible]} \end{cases}$$

on en déduit, d'après la remarque du n° 4* qu'on passe de l'ancien trièdre tangent au nouveau par la substitution *s* contravariante de S.

Comme on doit aussi avoir pour un scalaire λ ou pour un vecteur $\vec{a}$

$$d\lambda = \lambda'_u.du \text{ [illegible] } .dv \text{ [illegible] } \lambda'_w.dw = \lambda'_{u_1}. \text{[illegible]} .dv_1 + \lambda'_{w_1}. \text{[illegible]}_1,$$

$$\text{[illegible]} = \vec{a}'_u.du + \overrightarrow{a'_v}. \text{[illegible]} \overrightarrow{\text{[illegible]}'} \text{[illegible]} \vec{\text{[illegible]}}'_{v_1}.dv_1 + \overrightarrow{a'_{w_1}}.$$

on voit que c'est la même substitution *s*, contravariante de S, qui fait passer des anciennes dérivées partielles de λ ou de $\vec{a}$ aux nouvelles.

Par conséquent, *les vecteurs tangents et les dérivées partielles sont des variables covariantes* ([2]) *entre elles; elles sont contravariantes des coordonnées d'un point par rapport au trièdre tangent et des différentielles des coordonnées curvilignes.*

Ces considérations permettent de définir une expression utile dans certains cas : *on appelle dérivée d'un champ de scalaires λ ou de vecteurs $\vec{a}$ sui-*

([1]) Bien entendu ces transformations de trièdres tangents et de dérivées partielles se font en chaque point de l'espace; les substitutions *s* et S ont des coefficients qui, *a priori*, varient avec le point considéré; on a par suite un « champ de substitutions ».

([2]) Deux systèmes de trois variables (scalaires ou vectorielles) sont dits *covariants* si, dans un changement d'axes, ils sont transformés par une même substitution linéaire; ils sont dits *contravariants*, s'ils sont transformés par des substitutions contravariantes. La somme des produits mutuels des variables correspondantes de deux systèmes contravariants :

$$x.X + y.Y + z.Z;$$
$$\vec{a}.\vec{A} + \vec{b}.\vec{B} + \vec{c}.\vec{C}; \quad \vec{a} \text{ [illegible]}$$

est *invariante* dans le changement d'axes.

divergence, nous trouvons

$$\operatorname{div}.\vec{a} = \frac{\partial a_u}{\partial u} \qquad \cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial u} + \vec{V}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial u} + \vec{W}\cdot\frac{\partial w}{c}$$

$$+ \frac{\partial a_v}{\partial v} + \cdot$$

$$+ \frac{\partial a_w}{\partial w} \qquad \cdot\frac{}{\partial w} \qquad \cdot\frac{}{\partial w}$$

On vérifie immédiatement que les parenthèses sont les dérivées logarithmiques par rapport à u, v et w du déterminant du trièdre tangent

$$= \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

En effet,

$$\frac{\partial \delta}{\partial u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial u}. \qquad u.(\quad \wedge w) + u.(v$$

d'où

En remplaçant les parenthèses par ces valeurs on obtient l'expression de la divergence comme somme de trois dérivées

$$\operatorname{div}.\vec{a} = \frac{1}{\delta} \qquad \frac{\partial(a_v \delta)}{\partial v} + \frac{\partial(a_w \delta)}{\partial w}\Big]$$

On obtient une expression intéressante de la divergence quand le champ de vecteurs est un champ de vitesses, c'est-à-dire si l'on considère $\vec{a}$ comme étant la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à une certaine variable t. Dans ces conditions *la divergence est la dérivée logarithmique par rapport à t du déterminant des coordonnées* δ, *ceci quel que soit le système de coordonnées.* Effectivement on a

$$\frac{}{\partial u} \qquad \delta = \vec{u}.(\vec{v} \wedge$$

d'où, en dérivant δ par rapport à t et permutant convenablement les trois produits mixtes obtenus,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial} \cdot \quad \wedge \vec{u})$$

Mais la dérivée de $\vec{u}$ par rapport à t est une dérivée seconde de $\overrightarrow{OM}$ puisque u, v, w et t sont indépendants; donc moyennant certaines conditions de con-

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \qquad \partial^2(\overrightarrow{OM}) \qquad \frac{\partial \vec{a}}{\partial u};$$

de même pour $\vec{v}$ et $\vec{w}$. En remplaçant d'autre part les parenthèses en fonction des vecteurs du trièdre supplémentaire, on obtient

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial t} = \vec{U}.\frac{\partial \vec{a}}{\partial u} + \vec{V}.\frac{\partial \vec{a}}{\partial v} + \vec{W}.\frac{\partial \vec{a}}{\partial w} = \mathrm{div}.\vec{a}.$$

Ce résultat peut être utilisé pour calculer la dérivée d'une intégrale de volume lorsque le champ d'intégration (V) ainsi que la fonction vectorielle ou scalaire dépendent d'une variable t. Il suffit d'adopter un système de coordonnées curvilignes u, v, w tel que l'image (v) du champ d'intégration (V) dans l'espace des u, v, w soit indépendante de t : il n'y a plus alors qu'à dériver sous le signe somme. On obtient ainsi :

$$\iiint_v \left[d\lambda \qquad l(\overrightarrow{OM}) \right.$$

$$\iiint_V \left[\right.$$

15*. Rotationnel d'un champ de vecteurs. — L'invariant vectoriel d'un champ de vecteurs $\vec{D} \wedge \vec{a}$ est appelé *rotationnel du champ* ou encore *curl* ou *tourbillon*. On le représente parfois par la notation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}.\vec{a}.$$

Dans le cas d'un système d'axes rectangulaires, en désignant comme précédemment par a_x, a_y, a_z les composantes de $\vec{a}$ sur les axes, on a

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} = \vec{i}.\frac{\partial a_x}{\partial x} + \vec{j}.\frac{\partial a_y}{\partial x} + \vec{k}.\frac{\partial a_z}{\partial x},$$

d'où en multipliant extérieurement par $\vec{i}$, identique au vecteur $\vec{I}$ du trièdre supplémentaire,

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \qquad \frac{\partial a_y}{} \qquad \vec{j}\ \partial a_z$$

Calculons de même les autres termes du rotationnel, additionnons et mettons $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ en facteurs, nous obtenons

$$\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a} = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\cdot} - \frac{\partial a_y}{\cdot}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} \quad \partial a_z\right) + \vec{k}\left(\partial a_y \quad \partial a_x\right)$$

Le vecteur rotationnel est ainsi défini par ses composantes sur trois axes rectangulaires; il reste, bien entendu, invariant dans un changement d'axes. On peut considérer ces composantes comme les mineurs symboliques du tableau (comparer avec la règle du n° 27)

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{matrix}$$

On peut mettre sous une forme analogue à celle de la divergence l'expression du rotationnel en coordonnées curvilignes quelconques. Cherchons les composantes du rotationnel suivant le trièdre tangent $\left(\text{de vecteurs } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$; ce sont les projections sur les axes du trièdre supplémentaire. Par exemple sur l'axe des u :

$$\vec{U}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a} = \vec{U}. \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial u} \quad \partial \vec{a} \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial w}$$

On obtient une somme de trois produits mixtes : le premier est nul; en permutant les deux autres on obtient l'expression

$$U.\text{rot}.\vec{a} = \frac{\partial a}{\cdot}.\left(\vec{U} \quad \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial v} \quad v.\frac{}{\partial w}\right.$$

Une dernière simplification peut s'opérer du fait que

$$- \vec{a}.\frac{\partial \vec{w}}{\cdot}; \qquad v.\frac{}{\cdot} =$$

D'après une égalité établie au numéro précédent les termes soustractifs sont égaux; la différence des premiers membres est, par suite, égale à la différence des premiers termes des seconds membres. Le calcul est analogue pour les composantes du rotationnel sur les autres axes; on obtient finalement l'expression

$$\delta.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a} = \vec{u}.\left[\frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{w}\right)}{\partial v} - \frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{v}\right)}{\partial w}\right] + \vec{v}\left[\frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{u}\right)}{\partial w} - \frac{\partial\left(\vec{a}.\vec{w}\right)}{\partial u}\right]$$

produits par leur développement. Nous obtenons ainsi

$$\vec{P} \wedge \cdot \qquad\qquad + \vec{a} \wedge \big(P \wedge$$

$$\vec{P} \wedge (\vec{a} \wedge$$

On peut maintenant remplacer $\vec{p}$ et $\vec{P}$ par les couples de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{U}$, ..., et sommer; il suffit d'observer que la somme des termes $\vec{b}'_{\vec{p}}.(\vec{P}.\vec{a})$ est la dérivée du vecteur $\vec{b}$ suivant le vecteur $\vec{a}$. Finalement :

$$\overrightarrow{\text{grad}}.(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{b} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a} + \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}.\vec{b} + \vec{a}'_{\vec{b}} + \cdot$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}.\text{div}.\vec{b} - \cdot$$

17*. **Invariants différentiels du second ordre.** — On peut considérer les invariants qu'on vient d'étudier :

$$\vec{D}.\lambda; \qquad \vec{D}.\vec{a}; \qquad \cdot \wedge \vec{a}$$

comme constituant à leur tour des champs :

Champ vectoriel de gradients;
Champ scalaire de divergences;
Champ vectoriel de rotationnels.

En formant les invariants de ces nouveaux champs on obtient *a priori* cinq invariants différentiels du second ordre que nous allons étudier succinctement.

I. Le *rotationnel d'un gradient est nul :*

$$\vec{D} \qquad\qquad \overrightarrow{\text{rot}}.\overrightarrow{\text{grad}}.\lambda = 0.$$

En rapportant par exemple les champs à trois axes rectangulaires, les composantes du rotationnel du gradient de λ sont les mineurs symboliques du tableau :

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{(}{\partial} \\ \lambda'_x & \lambda'_y & \lambda \end{matrix}$$

ces mineurs sont nuls d'après la règle d'interversion des dérivées secondes.

II. La *divergence d'un rotationnel est nulle :*

$$\vec{D}.(\vec{D} \wedge \vec{a}) = 0, \qquad \text{div}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a} = 0.$$

composantes sont aussi fonctions linéaires de celles de $\vec{n}_e$. Raisonnons par exemple en coordonnées rectangulaires, les axes étant définis par les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Considérons le vecteur $\vec{N}$, dont les composantes, exprimées en fonction des composantes n_x, n_y, n_z de $\vec{n}_e$, sont :

$$y n_y + q_z n_z, \qquad r_x n_x + r_y n_y + r_z n_z\,;$$

nous pouvons écrire

$$\vec{N} = \vec{i}.(\vec{A}.\vec{n}_e) + \vec{j}.(\vec{B}.\vec{n}_e) + \vec{k}.(\vec{C}.\vec{n}_e),$$

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ étant des vecteurs qui ont pour projections sur les axes choisis

$$p_x,\ p_y,\ p_z\,;\ q_x,\ q_y,\ q_z\,;\ r_x,\ r_y,\ r_z.$$

Ceci posé, pour transformer l'intégrale vectorielle de surface,

$$\int\int [\vec{i}.(\vec{A}.\vec{n}_e$$

il suffit de la décomposer en une somme de trois termes en $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, et d'appliquer la formule de Green aux intégrales coefficients de ces vecteurs. On obtient ainsi

$$\int\int_S [\vec{i}.(\vec{A}.\vec{n}_e$$

$$\vec{i}.\text{div}.\vec{A} + \vec{j}.\text{div}.\text{I} \qquad \vec{k}.\text{div}.\vec{C}]$$

Cette formule n'est valable que pour $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fixes, mais on peut naturellement la mettre sous une forme valable également en coordonnées curvilignes. Nous nous contenterons d'en faire deux applications :

I. *Formule du gradient.* — Prenons pour le vecteur $\vec{N}$, fonction de $\vec{n}_e$, le produit de $\vec{n}_e$ par un scalaire λ (variable). En posant

$$\lambda.\vec{n}_e = \vec{i}.(\vec{A}.\vec{n}_e) + \vec{j}.(\vec{B}.\vec{n}_e) + \vec{k}.(\vec{C}.\vec{n}_e),$$

on a

Pour calculer les divergences de ces vecteurs, il suffit d'appliquer la formule du n° 16*,

$$\text{div}.(\lambda.\vec{a}) = \lambda.\text{div}.\vec{a} + \vec{a}.\overrightarrow{\text{grad}}.\lambda,$$

qui se simplifie puisque les divergences de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont nulles. La formule

délaissées au profit des études de Géométrie métrique, dont l'utilité est plus immédiate en Mécanique et en Physique.

Le Calcul Vectoriel commence d'ailleurs à s'introduire en France : de nombreux professeurs de Mécanique et de Physique en adoptent l'usage dans leur enseignement et dans leurs recherches; on en trouve plusieurs expositions en librairie; enfin, la pratique des examens d'entrée à l'École Normale supérieure et à l'École Navale nous a montré qu'on lui réserve une place, encore petite, dans l'enseignement des classes de Mathématiques spéciales. C'est cette place que nous voudrions voir plus importante, pour le profit, croyons-nous, des élèves, de leurs études actuelles et des applications qu'ils en feront par la suite dans leur vie scientifique ou industrielle. *Il faut pour cela que les maîtres, examinateurs et professeurs, soient persuadés que l'emploi des notations et des opérations vectorielles permet d'aborder avec aisance et élégance la majeure partie des théories et des problèmes qu'on peut demander aux examens d'entrée aux Grandes Écoles.* Cette persuasion est la condition nécessaire de l'introduction effective de la technique vectorielle dans les habitudes scientifiques françaises; elle en est aussi une condition suffisante, car elle entraînera rapidement une adaptation des programmes officiels des classes de préparation aux Grandes Écoles, et ces classes constituent, pour longtemps encore, la formation normale de notre élite scientifique et industrielle.

Nous avons donc rédigé ce Livre en pensant surtout aux classes de Mathématiques spéciales et nous nous sommes limités aux éléments du Calcul qui peuvent être introduits, sans difficultés et dès maintenant, dans l'enseignement. Nous avons développé les applications, en les empruntant à peu près toutes aux programmes actuels.

Dans le Chapitre I nous avons donné quelques définitions et exposé les propriétés de quelques opérations, dont la plupart sont déjà presque usuelles :

3. **Éléments d'un vecteur.** — Étant donnés des vecteurs, les longueurs de leurs segments sont des grandeurs scalaires; on sait donc trouver (au moins théoriquement) le rapport des longueurs de deux

Fig. 1.

vecteurs : c'est un nombre *positif*, rationnel ou irrationnel. Si l'on a adopté une unité de longueur, la longueur du segment a une « mesure », nombre positif que nous appellerons le *module* du vecteur.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ *peut alors être considéré comme défini par quatre éléments :*

1° *Son origine* A;

2° *La direction de la droite qui le porte;*

3° *Le sens de parcours sur cette direction, allant de l'origine* A *à l'extrémité* B;

4° *Son module (mesure de sa longueur).*

contre les notations suivantes :

$$[AB], \quad \overline{AB}, \quad (AB), \quad B - A.$$

La dernière notation est celle de MM. Burali-Forti et Marcolongo, qui considèrent un vecteur comme une « différence » de points.

Lorsqu'ils représentent un vecteur par une seule lettre, certains auteurs (allemands ou anglais surtout, par exemple M. Coffin, traduit par Véronnet) emploient des caractères gras ou des lettres gothiques, sans autre signe distinctif. Dans son cours de l'École Polytechnique, M. Lafay adopte la notation de Resal, en surmontant la lettre d'un simple trait.

La notation de la flèche, que nous avons adoptée, est celle de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Elle est employée notamment par M. Appell dans son *Traité de Mécanique rationnelle* (4 vol., Gauthier-Villars), ainsi que dans son Ouvrage *Éléments de la théorie des vecteurs et de la Géométrie analytique* (collection Payot), et par M. Haag dans son *Cours de Mathématiques spéciales* (Gauthier-Villars).

3. **Éléments d'un vecteur.** — Étant donnés des vecteurs, les longueurs de leurs segments sont des grandeurs scalaires; on sait donc trouver (au moins théoriquement) le rapport des longueurs de deux

Fig. 1.

vecteurs : c'est un nombre *positif*, rationnel ou irrationnel. Si l'on a adopté une unité de longueur, la longueur du segment a une « mesure », nombre positif que nous appellerons le *module* du vecteur.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ *peut alors être considéré comme défini par quatre éléments :*

1° *Son origine* A;
2° *La direction de la droite qui le porte;*
3° *Le sens de parcours sur cette direction, allant de l'origine* A *à l'extrémité* B;
4° *Son module (mesure de sa longueur).*

contre les notations suivantes :

$$[AB], \quad \overline{AB}, \quad (AB), \quad B-A.$$

La dernière notation est celle de MM. Burali-Forti et Marcolongo, qui considèrent un vecteur comme une « différence » de points.

Lorsqu'ils représentent un vecteur par une seule lettre, certains auteurs (allemands ou anglais surtout, par exemple M. Coffin, traduit par Véronnet) emploient des caractères gras ou des lettres gothiques, sans autre signe distinctif. Dans son cours de l'École Polytechnique, M. Lafay adopte la notation de Resal, en surmontant la lettre d'un simple trait.

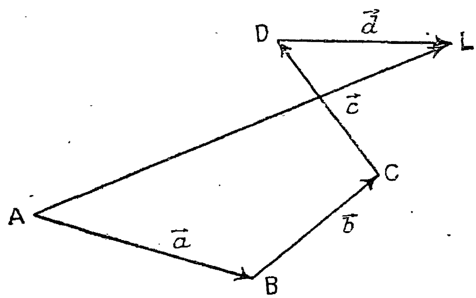
La notation de la flèche, que nous avons adoptée, est celle de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Elle est employée notamment par M. Appell dans son *Traité de Mécanique rationnelle* (4 vol., Gauthier-Villars), ainsi que dans son Ouvrage *Éléments de la théorie des vecteurs et de la Géométrie analytique* (collection Payot), et par M. Haag dans son *Cours de Mathématiques spéciales* (Gauthier-Villars).

II. — SOMME GÉOMETRIQUE.

8. **Définition de la somme.** — On appelle « somme géométrique » de plusieurs vecteurs (ou grandeurs vectorielles de même espèce) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, le vecteur obtenu par la règle du polygone :

Par un point A *on mène un vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *équipollent à* $\vec{a}$, *par le point* B *un vecteur* $\overrightarrow{BC}$ *équipollent à* $\vec{b}$, *par le point* C *un vecteur* $\overrightarrow{CD}$ *équipollent à* $\vec{c}$, *et ainsi de suite; si* L *est l'extrémité du dernier vecteur ainsi placé*, AL *est la somme géométrique des vecteurs.*

Fig. 3.



La somme n'est définie qu'à une équipollence près.

Cette définition de la somme suppose le choix d'une échelle pour représenter les grandeurs par des vecteurs. Si l'on change d'échelle, chacun des vecteurs représentatifs est dilaté dans le rapport des échelles $k = \frac{l'}{l}$; le polygone d'addition est remplacé par le polygone AB'C'D'...L', homothétique du précédent dans ce rapport k. Par suite le vecteur AL' représente, à l'échelle l', la même grandeur que le vecteur AL représentait à l'échelle l (voir *fig.* 6). La somme de plusieurs grandeurs est bien indépendante du choix de l'échelle.

Dans le cas de deux vecteurs, la définition de la somme est connue sous le nom de *règle du parallélogramme*. Au lieu de construire $\overrightarrow{OA}$

$\vec{a}$ de projections X, Y, Z :

$\vec{a}'$ de projections X′, Y′, Z′ :

$$\vec{a}' = X'.\vec{i} + Y'.\vec{j} + Z'.\vec{k}.$$

Conditions d'*équipollence :*

$$X = X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z$$

Conditions de *parallélisme :*

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}.$$

Composantes du *produit* $m.\vec{a}$:

$$m.X, \quad m.Y, \quad m.Z.$$

Composantes de la *somme* $\vec{a} + \vec{a}'$:

$$X + X', \quad Y + Y', \quad Z + Z'.$$

Démonstrations. — Pour la somme, il suffit d'additionner les égalités de définition des projections

$$\vec{a} + \vec{a}' = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k} + X'.\vec{i} + Y'.\vec{j} + Z'.\vec{k}.$$

D'après l'identité (1″) du n° 12, on peut mettre $\vec{i}$ en facteur dans le premier et le quatrième terme, de même $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Donc

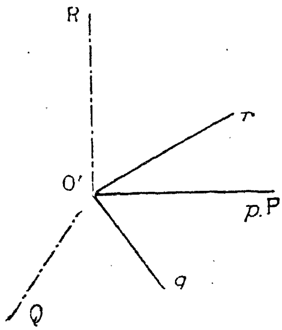
Pour le produit par le scalaire m, la règle résulte de l'identité (1′) du même numéro, combinée avec l'identité (1) du n° 7 :

$$m.\vec{a} = m.\left(X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}\right) = (m.X).\vec{i} + (m.Y).\vec{j} + (m.Z).\vec{k}.$$

En particulier, le produit par -1, c'est-à-dire encore l'opposé d'un vecteur, a pour projections les valeurs opposées de celles du vecteur primitif, ce qui est d'ailleurs évident géométriquement. On

O'P sur $O'p$; O'Q dans perpendiculaire à $O'p$ et du même

Fig. 11.



côté que $O'q$; enfin, O'R perpendiculaire au plan $O'pq$ et du même côté que $O'r$ [1].

17. Orientation de l'espace. — La comparaison des trièdres se ramenant à une question d'égalité ou de symétrie, pour comparer deux trièdres (T) et (U), on peut les comparer à un même troisième (I).

Si (T) et (U) sont tous deux de même sens que (I) ou tous deux de sens contraire à (I) [auquel cas ils sont de même sens que le symétrique de (I)], ils sont de même sens entre eux; si l'un d'eux est de même sens que (I) et l'autre de sens contraire à (I), ils sont de sens contraires. Il en est de même pour les sens de rotation autour d'un axe ou encore dans un plan opaque.

[1] Effectivement, pour un observateur sur $O'r$ ou O'R, c'est-à-dire d'un même côté du plan $O'pq$, les angles ($O'p$, $O'q$) et (O'P, O'Q) ont même sens, puisque $O'q$ et O'Q sont d'un même côté de $O'p$ prolongé. Pour un observateur sur $O'p$, donc sur O'P, l'angle ($O'q$, $O'r$) a le même sens que sa projection (O'Q, O'R') sur le plan O'QR, qui a le même sens elle-même que l'angle (O'Q, O'R), puisque O'R et O'R' sont d'un même côté du plan $O'pq$, donc aussi de O'Q prolongé. Enfin, des observateurs placés sur $O'q$ et O'Q se trouvent d'un même côté du plan $O'pr$, par suite, voient l'angle ($O'p$, $O'r$) dans le même sens. L'observateur sur O'Q voit cet angle ($O'p$, $O'r$) de même sens que sa projection ($O'p$, $O'r'$) sur $O'p$R et, par suite aussi, que l'angle (O'P, O'R). Les angles ($O'p$, $O'q$), ($O'q$, $O'r$), ($O'r$, $O'p$), vus de l'intérieur du trièdre, sont donc de même sens que les angles droits (O'P, O'Q), (O'Q, O'R), (O'R, O'P), vus également de l'intérieur (ou des arêtes opposées). Comme ces derniers sont de même sens entre eux, il en est de même des premiers.

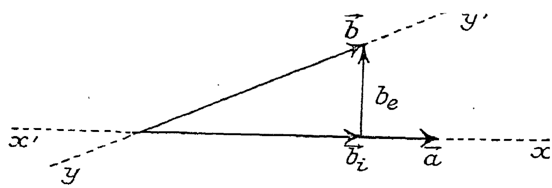
tions $(x'x, y'y)$ est alors l'angle des vecteurs [1] $(\vec{a}, \vec{b})$. On en déduit que le produit intérieur de deux vecteurs est égal *au produit de leurs modules par le cosinus de leur angle*

$$a.b = |a|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

De cette expression, il résulte que le produit intérieur de deux vecteurs est *positif, nul ou négatif, suivant que l'angle des deux vecteurs est aigu, droit ou obtus.*

On peut décomposer $\vec{b}$ en une somme de deux vecteurs : l'un porté par $x'x$, soit $\vec{b}_i$, l'autre par une perpendiculaire, soit $\vec{b}_e$; il est naturel

Fig. 14.



d'appeler ces composantes *intérieure* et *extérieure*. Avec ces conventions, le produit scalaire est égal au produit des mesures de $\vec{a}$ et de la composante intérieure de $\vec{b}$. C'est ce qui justifie la dénomination produit « intérieur » introduite par le mathématicien allemand Grassmann (1846).

Citons comme exemples de produits intérieurs : le travail d'une force qui est le produit scalaire des grandeurs dirigées force et déplacement; le flux de force à travers un élément de surface ds qui est le produit scalaire du vecteur force par le vecteur normal à l'élément, de longueur ds, dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

20. **Propriétés du produit intérieur.** — Ces propriétés sont résumées

---

(1) Par angle de deux vecteurs, il faut ainsi entendre « angle des demi-droites prolongeant ces vecteurs ».

Il est peut-être utile de remarquer qu'un tel angle n'étant pas dans un plan orienté, n'est défini qu'au signe près, et non à un multiple de 2π près. Mais ceci est sans importance, puisque cet angle n'intervient que par son cosinus.

avec les identités analogues du n° 20)

$$(4)\qquad \vec{a}\quad = -(\vec{b}\wedge\vec{a}),$$

$$.\vec{a})\wedge(y.\vec{b}) = xy.(\vec{a}\wedge\vec{b}),$$

$$(4'')\qquad \wedge(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c},$$

$$\vec{b}+\vec{c})\wedge\vec{a} = \vec{b}\wedge\vec{a}+\vec{c}\wedge\vec{a}.$$

En réunissant ces formules on obtient encore l'expression plus générale du produit de deux expressions linéaires de vecteurs à coefficients scalaires

$$(4''')\quad (x.\vec{a}+y.\vec{b}\qquad \wedge$$

$$\wedge\,\vec{a}')\qquad \wedge$$

Dans un tel développement, il faut cette fois respecter l'ordre des facteurs.

Enfin *pour qu'un produit extérieur de deux vecteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des vecteurs soit nul ou que les deux vecteurs soient parallèles* (pour le produit intérieur c'était perpendiculaires) :

$$\text{si}\qquad a\wedge b = 0\qquad \begin{cases}\text{ou } b = 0\\ \text{ou } \vec{a} = m.\vec{b}\end{cases}$$

et *réciproquement.*

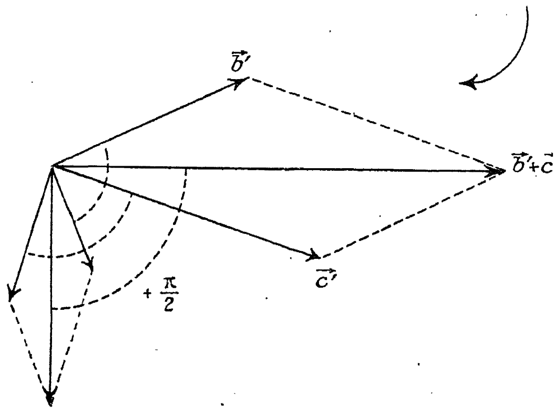
26. **Démonstration des propriétés précédentes.** — *Permutation des facteurs.* — Si l'on permute les facteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ du produit, la ligne d'action et le module du produit ne changent pas. Mais son sens devient opposé : c'est le cas où, dans un trièdre, on permute deux des axes; pour que le sens du trièdre ne change pas il faut changer le sens du troisième axe.

Produit par des scalaires. — L'identité (4') est d'abord évidente en module : en multipliant par x, y les côtés du parallélogramme on multiplie bien par xy la valeur absolue de son aire. La direction du

plan projetant $\vec{b}$ sur (A), et il contient $\vec{b'}$. Par suite les deux produits $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{b'}$ ont pour direction commune la perpendiculaire à ce plan. Ils ont aussi même module; l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égale à l'aire du rectangle construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b'}$. Enfin ils ont même sens; un observateur placé sur l'un d'eux voit les angles $(\vec{a}, \vec{b})$ et $(\vec{a}, \vec{b'})$ de même sens puisque $\vec{b}$ est à l'intérieur de l'angle droit $(\vec{a}, \vec{b'})$.

Ceci acquis, interprétons le produit de $\vec{a}$ par un vecteur $\vec{b'}$ perpen-

Fig. 19.



diculaire. Soit toujours (A) le plan perpendiculaire à $\vec{a}$ contenant $\vec{b'}$, on peut orienter ce plan par rapport à un observateur sur $\vec{a}$; alors le produit $\vec{a} \wedge \vec{b'}$ s'obtient en faisant *tourner* $\vec{b'}$ dans (A) de *un droit* dans le *sens positif*, puis en *dilatant* le *vecteur* dans le rapport de à l'unité.

Passons enfin à l'égalité à démontrer, par exemple sous la forme

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}.$$

Dans les produits, tant du second que du premier membre, on peut remplacer les seconds facteurs par leurs projections sur le plan per-

pendiculaire à $\vec{a}$, soient $\vec{b'}$, $\vec{c'}$ et la projection de $(\vec{b}+\vec{c})$ qui est la somme des projections $(\vec{b'}+\vec{c'})$:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b'}; \qquad \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c'}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \wedge (\vec{b'}+\vec{c'}).$$

Or, pour effectuer les trois produits extérieurs des seconds membres, il suffit de faire tourner les trois vecteurs $\vec{b'}$, $\vec{c'}$ et $\vec{b'}+\vec{c'}$ d'un angle droit dans le sens positif par rapport à $\vec{a}$ et de les dilater dans un rapport égal au module de $\vec{a}$.

Dans la figure initiale, $(\vec{b'}+\vec{c'})$ est la diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{b'}$ et $\vec{c'}$; la rotation suivie de la dilatation transforme le parallélogramme en un autre ayant pour côtés $(\vec{a} \wedge \vec{b'})$, $(\vec{a} \wedge \vec{c'})$ et pour diagonale $\vec{a} \wedge (\vec{b'}+\vec{c'})$; on a donc

$$\vec{a} \wedge (\vec{b'}+\vec{c'}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c'},$$

d'où, en remontant aux vecteurs donnés, l'égalité à établir.

La deuxième égalité résulte immédiatement de la précédente : en permutant les facteurs dans les deux membres, tous les termes prennent des valeurs opposées, donc l'égalité subsiste.

Avec la notion de composantes intérieure et extérieure déjà indiquée à propos du produit intérieur (n° 19), le lemme peut encore s'énoncer : le produit extérieur est égal au produit de $\vec{a}$ par la composante extérieure de $\vec{b}$. C'est la raison du nom de produit « *extérieur* », dû également à Grassmann.

27. **Projections du produit.** — Soient trois axes de coordonnées formant un trièdre Ox, y, z, trirectangle et direct. On forme immédia-

tement les produits des vecteurs unitaires portés par les axes $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \wedge \vec{i} = 0, & \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \\ \vec{j} \wedge \vec{j} = 0, & \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}, & \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{k} \wedge \vec{k} = 0, & \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}. \end{array}$$

Par suite, si l'on considère deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{a'}$, de projections (X, Y, Z), (X′, Y′, Z′), en les écrivant sous la forme (2) du n° 14 et effectuant le produit des sommes d'après (4‴) :

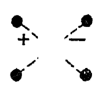
$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{a'} &= (X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}) \wedge (X'.\vec{i} + Y'.\vec{j} + Z'.\vec{k}) \\ &= (YZ' - ZY').\vec{i} + (ZX' - XZ').\vec{j} + (XY' - YX').\vec{k}. \end{aligned}$$

Les parenthèses donnent ainsi les expressions des projections du produit extérieur; voici une règle mnémotechnique pour leur formation : on écrit le tableau des projections en plaçant sur la première ligne celles du premier vecteur

$$\left.\begin{matrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{matrix}\right\|$$

et l'on fait les différences des produits en croix des trois tableaux carrés, obtenus en supprimant la première, la deuxième puis la troisième colonne; les signes étant pris comme suit :

Fig. 20.



Ce sont encore les « *mineurs* » du déterminant, obtenu en complétant le tableau précédent par une ligne supplémentaire.

Les composantes ainsi obtenues mettent en évidence les propriétés du produit extérieur (certains auteurs établissent d'abord les expressions des composantes et en déduisent ensuite les propriétés du produit). On voit immédiatement qu'elles prennent des valeurs opposées si l'on permute les vecteurs et qu'elles sont linéaires par rapport aux composantes de chaque facteur, de sorte que si l'on rem-

De même pour les autres projections, de sorte que :

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b}.\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}.\left(\vec{a}.\vec{b}\right).$$

Le double produit extérieur est situé dans le plan des deux derniers vecteurs; il est donc différent de $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$: *la multiplication extérieure des vecteurs n'est pas associative.*

On peut toutefois établir une relation entre les trois produits obtenus par permutations circulaires de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. On a :

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) + \vec{b} \wedge \left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right) + \vec{c} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = 0.$$

Il suffit de remplacer les divers produits par les expressions précédentes et de vérifier.

Le double produit permet de compléter la solution du problème de la division géométrique, donnée au n° 30. Soit à résoudre l'équation en $\vec{x}$,

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}.$$

Supposons $\vec{a}$ et $\vec{b}$ perpendiculaires et proposons-nous de chercher une solution, constituée par un vecteur perpendiculaire au plan de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, donc de la forme $m.\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)$. D'après la discussion du n° 30, cette solution existe et est unique. Reste à déterminer m ; en transportant cette expression de $\vec{x}$ dans l'équation on obtient l'équation en m :

$$\vec{b} = \vec{a} \wedge m.\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right) = m.\left[\vec{b}.\left(\vec{a}.\vec{a}\right) - \vec{a}.\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\right] = m\left(\vec{a}\right)^2.\vec{b}.$$

Ceci détermine m, d'où l'expression de la solution générale :

$$\vec{x} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\left(\vec{a}\right)^2} + \lambda.\vec{a}.$$

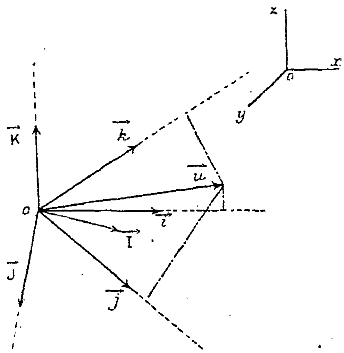
On peut même indiquer une expression de l'indéterminée λ; en multipliant intérieurement les deux membres de l'égalité par $\vec{a}$, on obtient

$$\vec{a}.\vec{x} = \lambda.\left(\vec{a}\right)^2.$$

du double produit,

le second crochet est évidemment nul, la valeur du premier est le

Fig. 24.



produit mixte

$$= \vec{i}.(\vec{j} \wedge \vec{k}),$$

c'est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. On obtient les autres produits en permutant circulairement $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dans le résultat, ce qui ne change pas ω, de sorte que

$$\vec{I} \wedge \vec{J} = \vec{k}$$

Si ω est positif, c'est-à-dire si le trièdre Ox, y, z est direct, ces trois derniers vecteurs ont même sens que les axes Ox, Oy, Oz du trièdre primitif [1]. On en déduit encore

Ceci posé, proposons-nous de résoudre l'équation en X, Y, Z,

$$Y.\vec{J}\,.$$

[1] Si Ox, y, z est direct, $\vec{I}$ et $\vec{i}$ sont d'un même côté du plan $\vec{j}$, $\vec{k}$; de $\vec{J}$, $\vec{j}$ et $\vec{K}$, $\vec{k}$. Les deux trièdres Ox, y, z et OX, Y, Z sont « supplémentaires » la réciprocité indiquée dans le texte.

Or on a précisément

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j};$$

d'où *les formules de transformation des coordonnées d'un point*,

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \text{si}$$

Dans les formules de *transformation des projections d'un vecteur*, le changement d'origine n'intervient pas :

$$= X'(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + Y'(-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha)$$
$$= (X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha)\vec{i} + (X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha)\vec{j},$$

d'où les relations (¹) :

$$X = X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha,$$
$$Y = X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha.$$

On déduit sans peine, soit de la même façon, soit en résolvant en x', y' les relations précédentes, les formules *inverses*, donnant les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes :

$$x' = \quad (x - \quad\quad - y_0)\sin\alpha,$$

III. — COORDONNÉES POLAIRES.

50. Forme polaire d'un vecteur. — Dans un plan orienté, on se donne un point O, le *pôle*, et une demi-droite ou axe Ox, l'*axe polaire*.

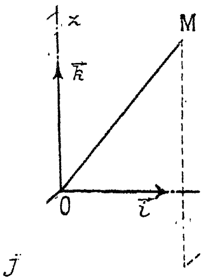
Le système d'axes (Ox, Oy) constitué par l'axe polaire Ox et

(¹) Il est intéressant de remarquer que ces formules comprennent comme cas particulier les formules d'addition des arcs. Il suffit de les appliquer à la transformation d'un vecteur de longueur 1 faisant l'angle β avec Ox', par suite $\alpha + \beta$ avec Ox :

$$X' = \cos\beta, \qquad Y' = \sin\beta,$$
$$X = \cos(\alpha + \beta), \qquad Y = \sin(\alpha$$

sont d'ailleurs l'abscisse et l'ordonnée de la projection de M sur le plan Oxy); z est appelé la *cote*.

Fig. 31.



Si un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par son origine, de coordonnées (a, b, c), et son extrémité, de coordonnées (a', b', c'), on a

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\text{projections de } \overrightarrow{AB} = (a'-a, \quad b'-b, \quad c'-c).$$

55. **Distance de deux points.** — On voit sans peine comment se modifient les formules de la géométrie plane (n° 43). Pour un vecteur $\vec{a}$ de projections (X, Y, Z), de longueur l :

Pour la distance de deux points A, B de coordonnées (a, b, c),

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = (a'-a \qquad\qquad c'-c)^2.$$

56. **Détermination d'une demi-droite ou droite dirigée.** — Pour repérer une demi-droite ou droite dirigée It, on se donne, comme en géométrie plane, les projections α, β, γ du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par It; on les appelle encore *cosinus directeurs* ou *paramètres directeurs principaux*. Ces nombres vérifient évidemment la relation

$$\vec{u}.u = 1;$$

$$^2 = 1.$$

2° Des cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens, soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$.

On cherche les relations entre les coordonnées (x, y, z), (x', y', z') d'un même point M, par rapport aux deux systèmes d'axes, ou encore entre les projections (X, Y, Z), (X', Y', Z') d'un même vecteur $\vec{a}$. On exprime de préférence les anciennes coordonnées, ou projections, en fonction des nouvelles.

On inscrit habituellement les cosinus directeurs en un tableau à double entrée :

	Ox.	Oy.	Oz.
Ox'	α	β	γ
Oy'	α'	β'	γ'
Oz'	α''	β''	γ''

Ce tableau peut se lire dans les *deux sens*, chaque terme est en effet le cosinus de l'angle de deux axes, un ancien et un nouveau. Ce sont d'ailleurs les produits intérieurs deux à deux des vecteurs unitaires sur les deux systèmes d'axes :

$\alpha = \vec{i}.\vec{i'}$	$\beta = \vec{j}.\vec{i'}$	$\gamma = \vec{k}.\vec{i'}$
$\alpha' = \vec{i}.\vec{j'}$	$\beta' = \vec{j}.\vec{j'}$	$\gamma' = \vec{k}.\vec{j'}$
$\alpha'' = \vec{i}.\vec{k'}$	$\beta'' = \vec{j}.\vec{k'}$	$\gamma'' = \vec{k}.\vec{k'}$

De sorte que les lignes sont les cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens $\left(\text{projections de } \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$, mais les colonnes sont les cosinus des anciens axes par rapport aux nouveaux $\left(\text{projections de } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

61. Relations entre les termes du tableau. — Les neuf termes du tableau ne sont pas indépendants, puisqu'on peut les considérer, de deux façons, comme les projections de trois vecteurs rectangulaires

entre eux et de longueur commune 1. On a pour les lignes

$$\vec{j'}.\vec{k'} = \vec{k'}.\vec{i'} = \vec{i'}.\vec{j'} = 0,$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \end{cases}$$

On a de même, pour les colonnes :

ou

(B)

Enfin, on peut encore utiliser la remarque du n° 58, relative à la détermination d'une droite dirigée directement perpendiculaire à deux autres droites dirigées rectangulaires, en considérant les relations

$$\vec{i'} = \vec{j'} \wedge \vec{k'}, \qquad \vec{j'} = \vec{k'} \wedge \vec{i'}, \qquad \vec{k'} = \vec{i'} \wedge \vec{j'},$$

ou

$$\alpha' = \beta''\gamma -$$

$$\beta = \gamma'\alpha'' -$$

On obtient un système analogue en partant de

$$\vec{k}$$

Ces derniers systèmes de relations peuvent encore s'exprimer en disant que dans le « déterminant des neuf cosinus »

chaque terme est égal au « coefficient » ou « mineur » correspondant. Le déterminant lui-même est égal à la valeur commune des

69. **Formes diverses d'équations d'une droite.** — Pour que les deux équations

$$ux + vy + w = 0,$$
$$u'x + v'y + w' = 0$$

représentent la même droite, il faut et il suffit que les coefficients soient proportionnels :

$$\frac{u'}{u} \qquad \frac{w'}{w}.$$

Démonstration. — Si les deux équations représentent la même droite, d'après la première méthode, les deux vecteurs

$$n' = u'.i + v'.j$$

sont parallèles. Donc

En outre, en désignant par A un point de (D),

$$w = -\vec{n}.\overrightarrow{OA}, \qquad w' = -\vec{n}'.\overrightarrow{OA} = -\lambda.(\vec{n}\ \overrightarrow{OA}) = \lambda.w..$$

Donc u', v', w' sont les produits de u, v, w par le même facteur λ.

La réciproque est immédiate si l'on multiplie par λ tous les coefficients d'une équation linéaire, c'est-à-dire encore son premier membre (le second étant o), on ne change pas les solutions, ni, par suite, la droite représentée.

On peut, en particulier, disposer du coefficient de proportionnalité de façon que

L'équation (I) s'écrit alors

$$M = \overline{OH};$$

en remarquant que les projections de $\vec{n}$ sont des cosinus directeurs, on peut ainsi écrire l'équation cartésienne

$$x.\cos\alpha + y.\sin\alpha + w = 0, \qquad \alpha = (Ox, \vec{n});$$

cette dernière forme est appelée l'*équation normale*. La formule

plan (P), le premier membre de l'équation (I'_e) est égal à

ce qui s'écrit encore

$$qQ = \frac{ux + vy}{\sqrt{u^2 +}}$$

en remarquant que $\overline{qQ}$ est la projection de $\overrightarrow{HQ}$ sur $\vec{n}$.

Le premier membre de cette égalité, $\overline{qQ}$, est *la distance de* Q *au plan* (P), mesurée sur la direction positive de $\vec{n}$, en allant du plan vers le point.

Cet énoncé est la généralisation immédiate de celui qui a été donné pour la droite, dans un plan, à partir du produit intérieur (n° 67).

73. Formes diverses d'équations d'un plan. — Pour que les deux équations

$$ux + vy + wz + s = 0,$$
$$u'x + v'y + w'z + s' = 0$$

représentent le même plan, il faut et il suffit que les coefficients soient proportionnels :

$$u' \quad v' \quad w' \;=\; s'$$

La démonstration est la même que pour la droite (n° 69) et il ne semble pas utile de la reprendre. On définit encore l'équation *normale* d'un plan, équation obtenue en choisissant $\vec{n}$ de manière que

$$\vec{n}^2 = 1 \qquad \text{ou}$$

u, v, w sont encore les cosinus directeurs d'une normale au plan, mais on ne peut plus les exprimer au moyen d'un seul angle (n° 56).

74. Équations d'une droite. — 1° Soient une droite (D), passant par un point A, de coordonnées (x_0, y_0, z_0), et un vecteur $\vec{a}$, de

tions est identique au lieu des points M vérifiant l'équation vectorielle

$$\vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{b},$$

$\vec{a}$ de projections p, q, r; $\vec{b}$ de projections l, m, n.

Comme $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires $\left(\vec{a}.\vec{b} = pl + qm + rn = 0\right)$, cette équation est possible (*voir* la division géométrique, n° 30) et le lieu des points M est la droite (D) parallèle à $\vec{a}$ et passant par le point H tel que le vecteur $\overrightarrow{OH}$ soit perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $\left(\vec{a}, \overrightarrow{OH}, \vec{b} \text{ direct}\right)$ et que

$$\overline{OH} =$$

Ces énoncés sont la généralisation immédiate de ceux que nous avons donnés pour la droite dans le plan, à partir du produit extérieur (n° 68). On peut faire à leur sujet les mêmes remarques. Notons encore que l'on peut écrire les conditions de parallélisme

ce qui montre immédiatement que les trois équations (II'_e) ne sont en réalité équivalentes qu'à un système de deux équations indépendantes.

Pour la réciproque, on peut remarquer de même que, grâce à la condition

$$pl + qm + rn = 0,$$

le système de trois équations est en réalité équivalent à un système de deux équations seulement.

Enfin, la construction de H se traduit par l'égalité vectorielle (n° 35) :

$$OH = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\left(\vec{a}\right)^2}.$$

Les équations considérées constituent, comme nous l'avons dit, une forme particulière du système d'équations pouvant représenter une droite. Chacune des équations représente un plan parallèle à l'un des axes de coordonnées. Pour cette raison, on dit que le système

pour $t = t_0$; l'existence de la dérivée entraîne la continuité pour la valeur t_0. *Si la fonction vectorielle est constante dans un intervalle, son vecteur dérivé est nul pour toute valeur de l'intervalle.*

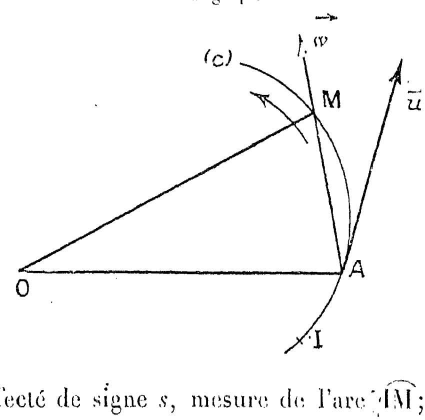
La définition du vecteur dérivé est en tout point semblable à celle de la dérivée d'une fonction scalaire. Pour représenter la dérivée nous emploierons des notations analogues à celles de *Lagrange* et de *Leibniz* (¹) :

$$\vec{a}'_t(t_0), \qquad \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

Si le vecteur fonction et la variable sont des mesures de grandeurs, le symbole de dimensions du vecteur dérivé est le quotient des symboles de dimensions du vecteur et de la variable (n° 38).

Supposons tracé l'hodographe de la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM} = \vec{a}(t)$ et soit A le point correspondant à la valeur t_0 de la variable. Supposons d'autre part qu'on ait pris sur l'hodographe une origine I et un sens de circulation, de sorte qu'à chaque point on fasse correspondre

Fig. 40.



un nombre affecté de signe s, mesure de l'arc $\widehat{IM}$; en vertu de la correspondance entre M et t, s est une fonction scalaire de t.

(¹) La notation de Leibniz ne met pas en évidence la valeur de la variable pour laquelle on dérive; par contre elle facilite le changement de variable comme on le verra au n° 85, au sujet des différentielles.

Certains auteurs emploient la notation de Newton qui avait été abandonnée, et qui consiste à représenter la dérivée par la même lettre que la fonction, surmontée d'un point :

des différentielles qui a l'avantage de ne pas expliciter la variable adoptée :

$$d(\vec{a}+\vec{b}) = \overrightarrow{da}+\overrightarrow{db},$$

$$d(f.\vec{a}) = f.\overrightarrow{da}+df.\vec{a},$$

$$d(\vec{a}.\vec{b}) = \overrightarrow{da}.\vec{b}+\vec{a}.\overrightarrow{db},$$

$$d(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \overrightarrow{da}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\overrightarrow{db}.$$

Les démonstrations sont analogues à celles que l'on donne pour les dérivées des fonctions scalaires et résultent immédiatement de la définition des dérivées et de ce qui a été dit sur les limites des sommes et produits (n° 80). Dans la règle du produit extérieur, il y a lieu de conserver l'ordre des divers produits.

Établissons par exemple cette dernière règle ; soient toujours t_0 la valeur de la variable, pour laquelle on cherche la dérivée, et t une valeur voisine. La dérivée du produit extérieur est la limite du rapport (si elle existe)

$$\vec{a}(t)\wedge\vec{b}(t)-\vec{a}(t_0)\wedge\vec{b}(t_0).$$

On peut écrire le numérateur, en ajoutant et retranchant le produit extérieur $\vec{a}(t)\wedge\vec{b}(t_0)$ et groupant les termes deux à deux par application du principe de distributivité (n° 25, formule 4″) :

d'où l'expression du rapport

Si l'on admet que les deux fonctions $\vec{a}(t)$ et $\vec{b}(t)$ ont des dérivées pour $t=t_0$, les deux rapports ont ces dérivées pour limites ; en outre $\vec{a}(t)$ tend vers $\vec{a}(t_0)$, et $\vec{b}(t_0)$ reste constant, lorsque t tend vers t_0. Enfin la limite d'un produit extérieur étant le produit extérieur des limites et de même pour une somme, on voit que la limite

de l'expression est

87. Changement de variable dans les dérivées d'ordre supérieur. — Donnons-nous, comme au n° 84, une fonction scalaire $\theta(t)$ permettant de définir, dans un certain intervalle, t comme fonction uniforme de θ, telle en outre que les dérivées successives de t par rapport à θ existent, la dérivée première étant différente de zéro. Entre les dérivées premières d'un vecteur $\vec{a}$ par rapport à θ et à la relation

$$\frac{da}{d\theta} \quad \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}.$$

Calculons la dérivée seconde de $\vec{a}$ par rapport à θ, en appliquant la règle (n° 86) de dérivation du produit d'un vecteur par un scalaire :

$$\overrightarrow{d^2 a} \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)\frac{dt}{d\theta} + \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} \quad {}^2 . \quad da \quad d^2t$$

La règle relative aux dérivées premières ne se généralise donc pas; *les dérivées secondes par rapport à θ et à t n'ont pas en général même direction.*

En dérivant la somme précédente et en appliquant à chacun de ses termes la règle de dérivation du produit d'un vecteur par un scalaire on obtient de même

$$dt\Big)^3 + 3\,\frac{d^2a}{\cdot}\cdot\frac{dt}{}\cdot\frac{d^2t}{} + \quad da \quad d^3t$$

De proche en proche on peut calculer $\frac{\overrightarrow{d^p a}}{d\theta^p}$ qui est une expression linéaire à coefficients scalaires de $\frac{\overrightarrow{d^p a}}{dt^p}, \frac{\overrightarrow{d^{p-1} a}}{dt^{p-1}}, \ldots, \frac{\overrightarrow{da}}{dt}$; le premier terme a pour coefficient

89. Vecteur de direction fixe. — Soit une fonction vectorielle $\vec{a}(t)$ dont la direction reste fixe. On peut choisir sur cette direction un sens positif, donc un vecteur unitaire $\vec{u}$; soit alors $f(t)$ la mesure du vecteur, de sorte que

$$\vec{a}(t) = \vec{u}.f(t).$$

En dérivant, d'après la règle du n° 86 et tenant compte de ce que la dérivée du vecteur constant $\vec{u}$ est nulle, on obtient

$$\overrightarrow{da} \quad \vec{u}\,df$$

La dérivée d'un vecteur de direction constante est un vecteur de même direction, qui a pour mesure la dérivée de la mesure.

On peut encore remarquer que, dans ce cas, l'hodographe du vecteur variable est une droite, et qu'en prenant comme origine sur cet hodographe le point O, l'arc OM est précisément égal à la mesure du vecteur. L'énoncé du n° 82 donne la propriété précédente [1].

90. Vecteur de module constant. — Soit encore un vecteur $\vec{a}$ de direction variable, mais de module fixe :

$$R.$$

L'hodographe de ce vecteur est le lieu d'un point M qui reste constamment à une distance R de l'origine O; c'est donc une courbe tracée sur la sphère du centre O et de rayon R.

Mais le carré du vecteur a est constant :

$$\vec{\ }\ \vec{\ }$$

En différentiant cette égalité, on obtient

$$2\vec{a}.\overrightarrow{da} = 0.$$

Ceci exprime que : *la différentielle ou la dérivée d'un vecteur de module constant est perpendiculaire à ce vecteur.*

[1] La réciproque sera démontrée au n° 95.

En remplaçant la différentielle de $\vec{r}$, vecteur de module constant, par son expression donnée au n° 91, on obtient

on désigne par $\vec{p}$ le vecteur $(\vec{k} \wedge \vec{r})$, de module 1 et « directement perpendiculaire » à $\vec{r}$ (n° 28).

Les composantes de la différentielle du vecteur $\vec{a}$, *sur le rayon vecteur* (demi-droite d'angle polaire θ, de vecteur unitaire $\vec{r}$) *et sur la demi-droite directement perpendiculaire* [d'angle polaire $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, de vecteur unitaire $\vec{p} = \vec{k} \wedge$

Différentions à nouveau l'égalité qui donne $\overrightarrow{da}$, on obtient

On connaît déjà $\overrightarrow{dr}$; comme $\vec{p}$ est aussi un vecteur de module constant, on a de même

$$\overrightarrow{dp} = (\vec{k} \wedge \vec{p}).d\theta = -\vec{r}.d\theta.$$

En effet le vecteur $(\vec{k} \wedge \vec{p})$ se déduit de $\vec{p}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, donc de $\vec{r}$ par une rotation de $2.\frac{\pi}{2} = \pi$ (¹). En remplaçant $\overrightarrow{dr}$ et $\overrightarrow{dp}$ par leurs valeurs, on obtient pour $\overrightarrow{d^2a}$ une expression linéaire en $\vec{r}$ et $\vec{p}$:

$$\overrightarrow{d^2a} = \vec{r}.[d^2\rho - \rho.(d\theta)^2] + \vec{p}.[\rho.d^2\theta + 2.d\rho.d\theta].$$

Les parenthèses sont les composantes de la différentielle seconde de $\vec{a}$, *sur le rayon vecteur et le rayon directement rectangulaire.*

(¹) On obtient d'ailleurs ce même résultat en différentiant directement $\vec{k} \wedge \vec{r}$.

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \frac{t - t_0}{1} \cdot \alpha'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} \cdot \alpha''(t_0) \cdot$$

qui n'est autre chose que la formule de Taylor pour la fonction scalaire $\alpha(t)$ admettant des dérivées continues comme $\vec{a}(t)$; on sait que le coefficient de $(t - t_0)^n$ dans le dernier terme est un infiniment petit; or ce coefficient $\left[\vec{u}.\vec{\varepsilon}(t)\right]$ est la projection du vecteur $\vec{\varepsilon}$ sur l'axe envisagé.

On remarquera que cet énoncé de la formule de Taylor ne donne pas la forme du « *reste* », mais indique seulement qu'il est *infiniment petit d'ordre supérieur* (1) *à n* par rapport à l'accroissement de la variable.

Dans certaines applications il est avantageux d'avoir une précision plus grande sur le reste $(t - t_0)^n.\vec{\varepsilon}(t)$. *Si la dérivée d'ordre $n+1$ de $\vec{a}(t)$ existe et si* M *désigne une limite supérieure de son module dans un intervalle comprenant t_0 et t, on a*

$$\frac{(t - t_0}{(n+1)!}$$

Effectivement pour le développement de la fonction scalaire α on connaît le reste sous la forme de Lagrange, de sorte que

$$\ldots{}^{n+1} \quad \ldots \mathrm{M}$$

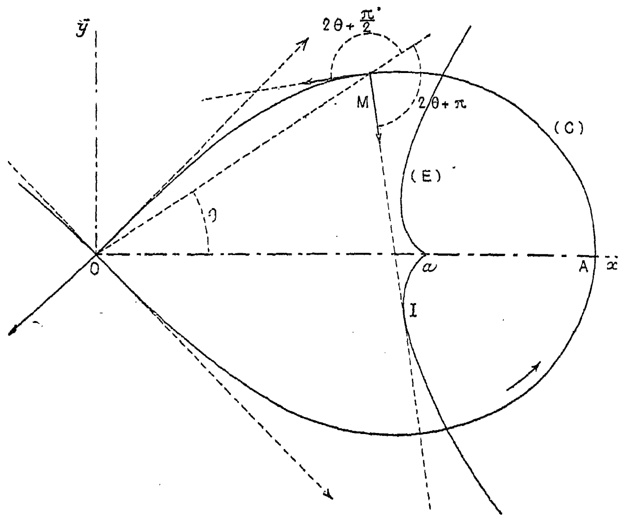
La dernière inégalité résulte de ce que $\alpha^{(n+1)}(t')$ est la projection de $\overrightarrow{a^{(n+1)}}(t')$; elle est par suite inférieure au module de ce vecteur et *a fortiori* à M, puisque t' est compris entre t_0 et t. L'inégalité ayant lieu pour tout axe $\vec{u}$ a lieu en particulier pour trois axes de coor-

(1) La définition de *l'ordre d'un infiniment petit vectoriel* est naturellement analogue à celle de l'ordre d'un infiniment petit scalaire : le vecteur $\vec{b}(t)$ infiniment petit en même temps que la variable scalaire t est d'ordre p par rapport à t si le vecteur $\vec{b}(t).t^{-p}$ tend vers une limite finie et non nulle quand t tend vers zéro.

maximum ou un minimum); ou la forme d'un *point simple sans inflexion* (p impair, R *continue à varier dans le même sens*) [1].

L'étude des points exceptionnels de (C) est naturellement plus compliquée, nous nous contenterons de l'ébaucher. Si un point O de (C) est à courbure nulle, le rayon de courbure devient infini, la définition du point I ne s'applique plus. Mais si l'on fait varier M sur (C) en se rapprochant de O (*fig.* 51), R et par suite MI augmentent

Fig. 51.



indéfiniment, la courbe (E) a une branche infinie. Cette branche admet la normale en O comme asymptote, puisque c'est la limite de la tangente en I lorsque M se rapprochant de O, I s'éloigne indéfiniment [2].

Considérons encore le cas d'un point de rebroussement de première espèce en O, caractérisé par exemple par le développement

(1) On pourrait également obtenir ces résultats, comme les suivants, en développant méthodiquement $\overrightarrow{OM}$, $\vec{u}$, $\vec{n}$, R et $\overrightarrow{OI}$ en fonction de l'arc s (fin du n° 104).

(2) Ceci s'établit aussi par le calcul en développant $\overrightarrow{OM}$ en fonction de l'arc $s = \overset{\frown}{OM}$ et en cherchant l'expression de $\overrightarrow{OI}$.

l'angle de la tangente dans le sens des φ croissants et de la normale dans le sens de la courbure est directement rectangulaire.

L'expression du rayon de courbure (n° 101) est

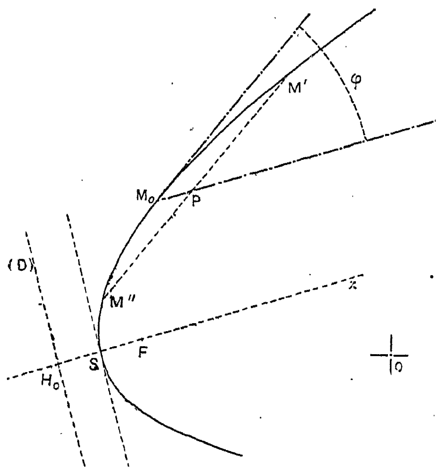
$$R = \qquad {}^{3}$$

On peut en déduire la position du centre de courbure et une construction géométrique de ce centre ([1]).

117. **Parabole.** — On peut définir une parabole comme l'hodographe d'une fonction vectorielle représentée par un trinome du second degré en t, à coefficients vectoriels :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}.t^2 + 2.\vec{b}.t + \vec{c}.$$

Fig. 53.



Décomposons cette fonction en une somme :

$$\longrightarrow \mid \overrightarrow{OP} = \vec{a}.$$

([1]) On peut faire des calculs analogues pour l'hyperbole en utilisant les fonctions hyperboliques; c'est l'hodographe de

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}a \qquad - \vec{j}b.\text{sh}\,\varphi.$$

Donc au voisinage de O :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{t^2}{2!}\vec{j} + \frac{t^3}{3!}\vec{i} + \frac{t^4}{4!}\vec{j} - \frac{t^5}{5!}\vec{i}$$

O est un point de rebroussement de première espèce (n° 106).

Les expressions des dérivées en un point quelconque M permettent d'obtenir le centre de courbure I en ce point; il suffit de former le produit extérieur des dérivées première et seconde et le carré de la dérivée première :

$$\frac{\quad}{dt} \wedge \qquad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{k}.\left[\sin\left(-t - \frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$$

$$= -\vec{k}.(1 - \cos t),$$

$$= 1 - 2.\vec{i}.\overrightarrow{AM'} + 1 = 2.(1 - \cos t).$$

Dans la formule du n° 112 le rapport a donc pour valeur -2, d'où la position du point I :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} - 2.\vec{k} \wedge \left(\vec{i} - \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{OM} - 2.\left(\vec{j} + \overrightarrow{AM}\right),$$

ou, en tenant compte de l'expression de $\overrightarrow{OM}$,

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}.t - \vec{j} - \overrightarrow{AM}.$$

On en déduit immédiatement la construction indiquée sur la figure : on mène $\overrightarrow{OP} = \vec{i}.t$, puis $\overrightarrow{PA_1}$ opposé à $\overrightarrow{PA} = \vec{j}$, enfin $\overrightarrow{A_1I}$ opposé à $\overrightarrow{AM}$, de sorte que M et I sont symétriques par rapport à P. On voit que le lieu de I est une cycloïde égale à la première, engendrée par un cercle de même rayon roulant sans glisser sur la droite O_1x_1.

120. **Hypocycloïde à quatre rebroussements.** — L'hypocycloïde à quatre rebroussements est le lieu d'un point M d'une circonférence de rayon r, roulant sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de rayon $4r$. On voit immédiatement que la courbe se reproduit par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour du centre de la circonférence fixe; on n'a représenté sur la figure que le quart de la courbe, obtenu par une rotation

et en formant le produit intérieur, il ne reste que le produit de ce dernier terme par $\vec{u}$, d'où

$$= -\vec{u}(\vec{u} \wedge \vec{b}) . \frac{1}{T.R^2}(ds)^6 = -\frac{(ds)^6}{T.R^2}$$

On en déduit l'expression du rayon de torsion, en remplaçant le rayon de courbure par son expression déjà trouvée :

$$\left| d(\overrightarrow{OM}) \qquad \right|^2 \qquad \wedge \quad \overrightarrow{OM})$$

On peut encore appliquer au numérateur la formule de Lagrange, d'où

$$T = -\frac{\left[d(\overrightarrow{OM})\right]^2 . \left[d\right.}{d(\overrightarrow{OM}) . \left[d^2(\overrightarrow{OM}) \wedge d^3(\overrightarrow{OM})\right]} .$$

On peut dans cette expression remplacer les différentielles par des dérivées par rapport à une variable quelconque; d'après ce qui a été dit au n° 88, le résultat est indépendant de cette variable ([1]).

Contrairement à ce qui se passe pour le rayon de courbure, l'expression du rayon de torsion est *rationnelle* par rapport aux dérivées ou différentielles (il n'y a pas de valeurs absolues). En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

([1]) La remarque faite au n° 97, dans le cas du plan, reste valable ici : la différentielle de $(\overrightarrow{OM})$ ne dépend pas de l'origine O choisie; on peut donc l'écrire simplement $\overrightarrow{dM}$; les rayons de courbure et de torsion prennent alors la forme plus condensée :

$$R = \frac{dM}{|\,dM \wedge d^2M} \qquad T = -\frac{(\overrightarrow{dM})^2 . (\quad {}^2 - (\overrightarrow{dM} . \overrightarrow{d^2M})}{\overrightarrow{dM} . (\overrightarrow{d^2M} \wedge \overrightarrow{d^3M})}$$

140. Dérivées successives. — Les dérivées partielles $\vec{a}'_u(u, v)$, $\vec{a}'_v(u, v)$ étant à leur tour des fonctions vectorielles des deux variables u, v, on peut calculer leurs dérivées; ce sont les vecteurs « dérivées secondes » de $\vec{a}(u, v)$. On les représente par les notations

$$\vec{a}''_{u^2}, \quad \vec{a}''_{uv}, \quad \vec{a}''_{vu}, \quad \vec{a}''_{v^2}$$

Comme pour une fonction scalaire, on peut intervertir l'ordre des dérivations, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial a}{\partial u\, \partial v} \qquad \frac{\partial a}{\partial v\, \partial u}$$

ceci, moyennant l'existence des dérivées troisièmes. On peut aussi établir que la valeur commune de ces dérivées est la limite du vecteur

$$\vec{a}(u', v') - \vec{a}(u', v) - \underline{\vec{a}(u, v') + \vec{a}(u, v)}$$

lorsque u' et v' tendent vers u et v.

Ce théorème se démontre comme celui des fonctions composées en partant de la formule de Taylor ou en s'appuyant sur la propriété analogue pour les fonctions scalaires, projections sur les axes de $\vec{a}(u, v)$.

Cette propriété s'étend naturellement aux dérivées successives, de sorte que les dérivées partielles d'ordre p peuvent s'écrire

$$\overrightarrow{{}^{3}a}$$

sans préciser dans quel ordre on dérive α fois par rapport à u et β fois par rapport à v.

141. Différentielles successives. Formule de Taylor. — La dérivée seconde d'une fonction $\vec{a}$ de u, v, sur un chemin où u et v sont fonctions simultanées d'une variable t, s'exprime au moyen des dérivées partielles secondes. En employant, par exemple, la notation

pour la fonction composée d'une variable t :

$$\vec{a}[u_0 + t(u - u_0), v_0 + t(v - v_0)] = \vec{a}(u_0 + th, v_0 + tk).$$

Cette formule s'écrit ($0 \leqq t \leqq 1$)

$$_0 + th, \quad \cdot tk) = \vec{a}(u_0, v_0) + \frac{t}{1}(h a'_{u_0} \qquad \frac{t^2}{\cdot}(h.$$

$$\cdot k \vec{a}'_{v_0} \qquad \cdot 1)! \, \varphi(h,$$

$$\vec{\ }(\ ,k) = . \qquad \vec{A} \qquad | < 3M,$$

M désignant une limite supérieure du module des dérivées d'ordre $n+1$.

En particulier, si l'on fait $t = 1$, on obtient la relation

$$-\frac{1}{n!}(h \vec{a}'_{u_0}$$

connue sous le nom de *formule de Taylor pour les fonctions de deux variables.*

142. Intégrales doubles. — Considérons un domaine (C) dans lequel varie le point m de coordonnées u, v, et une fonction vectorielle $\vec{a}(u, v)$, définie dans un domaine comprenant (C). On peut définir l'intégrale double, étendue au domaine (C)

$$\vec{c} = \int\int_C \vec{a}(u, v).du.\iota$$

soit en passant par l'intermédiaire des projections de $\vec{a}$ sur trois axes, soit en raisonnant directement sur les vecteurs. Cette intégrale est caractérisée par l'un ou l'autre des systèmes de propriétés suivantes :

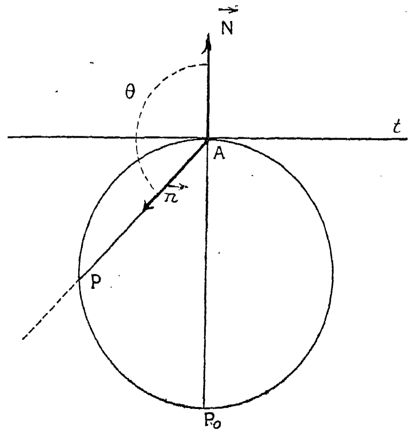
1° Si (C) est formé par la juxtaposition de deux domaines (C′) et (C″) sans partie commune, l'intégrale étendue à (C) est la somme des intégrales étendues à (C′) et (C″)

$$\vec{I_C} = \vec{I_{C'}} + \vec{I_{C''}}.$$

courbes $\frac{R}{\cos\theta}$ a une valeur constante. Portons sur $\vec{N}$ un vecteur $\overrightarrow{AP_0}$ dont la mesure soit précisément cette constante. L'égalité

montre que le segment AP, allant du point A au centre de courbure P

Fig. 67.



de (C), est la projection de AP_0 sur la normale à (C). Donc :

Le lieu des centres de courbure au point A, *des courbes* (C) *de* (S), *tangentes en* A *à une même droite* At, *est une circonférence de diamètre* AP_0; P_0 étant un certain point de la normale en A. Cette propriété est connue sous le nom de « *théorème de Meusnier* ».

On en conclut notamment que *toutes les courbes de la surface ayant en* A *même plan osculateur* (non tangent à la surface) *ont même centre de courbure*, puisque pour toutes ces courbes le rapport $du:dv$ et l'angle θ gardent la même valeur.

Le point P_0 est le centre de courbure commun de toutes les courbes dont le plan osculateur contient At et la normale $\vec{N}$, c'est-à-dire passe par la tangente At et est normal à la surface. C'est, en particulier, le centre de courbure de la section de la surface par le plan normal passant par At.

Le théorème de Meusnier ramène l'étude de la courbure en A des diverses courbes tracées sur (S) (hormis celles dont le plan osculateur est tangent) à l'étude de la courbure des seules sections planes normales de (S).

158. Expressions de D, D′, D″. — Reprenons les expressions de D, D′, D″, produits intérieurs de $\vec{w}$ par les différentielles secondes. Ce sont par suite les produits mixtes

$$D = \quad \partial u^2 \qquad\qquad \overline{\partial v}$$

$$D' =$$

$$D'' = \quad \overline{\partial v^2} \cdot \left[\frac{\partial (}{} \qquad \wedge \right.$$

qui s'expriment immédiatement par des déterminants formés avec les dérivées partielles des coordonnées x, y, z du point M (n° 32).

Ces expressions prennent des valeurs simples si l'on choisit pour u et v les coordonnées x, y de la projection de M, indiquées au n° 144. On a alors

$$\frac{\partial^2(\overrightarrow{OM})}{\partial x^2} = \ldots, \qquad \partial x\, \partial y = \ldots, \qquad \partial y^2 \quad = \vec{k}.t;$$

multipliant par $\vec{w}$ (dont on a donné l'expression), on trouve

La forme différentielle elle-même

égale à

Si nous remarquons que, quelle que soit la courbe considérée sur la surface, on a

$$= 0,$$

au voisinage de A, du côté du plan tangent qui contient la direction positive du vecteur $\vec{w}$ ou du côté opposé (¹).

159. Courbure d'une surface de révolution. — Considérons une surface de révolution définie comme au n° 148

On a

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{u}\, d\sigma + \vec{p}\rho\, d\varphi, \qquad \vec{u} = \vec{k}z' + \vec{r}\rho'.$$

D'où la différentielle seconde

$$d^2(\overrightarrow{OM}) = (\vec{k}z'' + \vec{r}\rho'')\, d\sigma^2 - \vec{r}\rho\, d\varphi^2 + 2\vec{p}\rho'\, d\sigma\, d\varphi + \vec{u}\, d^2\sigma + \vec{p}\rho\, d^2\varphi.$$

Choisissons comme vecteur normal à la surface *le vecteur unitaire* $\vec{N}$ *porté par la normale à la méridienne dans le sens de la courbure*. La première formule de Frenet (n° 125) donne l'expression du coefficient de $d\sigma^2$, en fonction de ce vecteur $\vec{N}$ et du rayon de courbure R_0 de la méridienne

$$\rightarrow$$

Dans le produit intérieur de $d^2(\overrightarrow{OM})$ par $\vec{N}$, les trois derniers termes disparaissent $(\vec{u}.\vec{N} = 0,\ \vec{p}.\vec{N} = 0)$; il vient

$$\vec{N}.d^2(\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{R_0}\, d\sigma^2 - (\vec{r}.\vec{N})\rho\, d\varphi^2.$$

En utilisant l'expression trouvée pour le ds^2 de la surface (n° 154), nous obtenons finalement l'expression de la courbure

$$\overline{d\sigma^2 + \rho^2\, d\varphi^2}$$

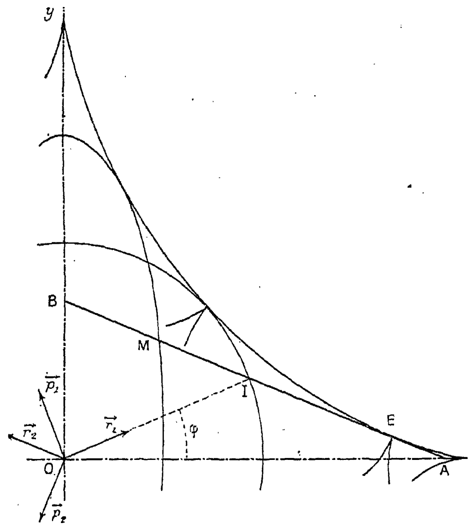
Si l'on envisage seulement une section plane normale, le premier

(¹) On peut encore remplacer, dans cette recherche, $\vec{w}$ par un vecteur normal quelconque.

droite nous prendrons comme paramètre l'angle $\varphi = (Ox, OI)$. Choisissons comme sens positif sur la droite celui de AI de sorte que

$$(Ox, AI) = \pi - \varphi.$$

Fig. 72



Enfin fixons la position d'un point M de la droite par la mesure sur la direction précédente du vecteur $\overrightarrow{IM}$:

$$\overline{IM} = \lambda.$$

En désignant par $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ des vecteurs unitaires faisant les angles φ, $\pi - \varphi$ avec Ox, le point M est défini par l'égalité ([1])

$$\overrightarrow{OM} = l.\overrightarrow{r_1} + \lambda.\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{i}.(l - \lambda).\cos\varphi + \overrightarrow{j}.(l + \lambda).\sin\varphi.$$

En différentiant on obtient

$$d(\overrightarrow{OM}) = (l.\overrightarrow{p_1} - \lambda.\overrightarrow{p_2}).d\varphi + \overrightarrow{r_2}.d\lambda,$$

$\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$ étant déduits de $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Annulons

---

([1]) Il est facile de vérifier que l'expression de $\overrightarrow{OM}$ en fonction de λ et φ est une représentation impropre du plan.

le produit extérieur des coefficients des différentielles,

Les deux produits extérieurs sont portés par la perpendiculaire au plan; on peut les remplacer par leurs mesures (n° 28), qui sont les sinus des angles, soit respectivement

$$r_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi + \pi - \varphi\right) = \cos 2\varphi,$$

d'où la relation

$$o = l(\cos 2\varphi) - \lambda(-1)$$

qui donne l'expression de λ en fonction de φ; en portant dans $\overrightarrow{OM}$, on obtient l'équation de (E), enveloppe des diverses familles de courbes

$$\overrightarrow{OM} = l(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}.\cos 2\varphi) = 2l(\vec{i}.\cos^3\varphi + \vec{j}.\sin^3\varphi).$$

On construit aisément la courbe hodographe de cette fonction et l'on peut vérifier que c'est une hypocycloïde à quatre rebroussements (qu'on appelle encore une astroïde) (n° 120).

Cette courbe est l'enveloppe des courbes $\varphi = \text{const.}$, c'est-à-dire des droites AB. C'est aussi l'enveloppe des courbes $\lambda = \text{const.}$ qui sont des ellipses d'axes Ox, Oy et de longueurs d'axes $l - \lambda$, $l + \lambda$ (n° 116); les courbes de ces deux familles n'ont effectivement pas de points singuliers.

Si l'on cherche les trajectoires orthogonales des droites AB, on est conduit à l'équation

$$o = \overrightarrow{r_2}.[(l.\overrightarrow{p_1} - \lambda.\vec{j} \qquad \overrightarrow{r_2}.d\lambda] =$$

L'intégration est immédiate et ces trajectoires constituent une nouvelle famille de courbes déduites de la fonction vectorielle. Mais ces trajectoires ne sont autres que les développantes de (E); d'après ce qui a été dit au n° 110, (E) est le lieu de leurs points de rebroussement, et non plus leur enveloppe.

166. Famille de droites dans un plan. — Considérons une famille

sont sur la surface réglée, lieu de cette droite (B). *Cette surface réglée est appelée la « surface polaire » de la courbe* (C).

La surface polaire est définie comme l'hodographe de la fonction de S et x :

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

d'où

Le vecteur normal

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} \quad \wedge \quad \frac{x}{\pi}\Big) \vec{\mathrm{U}}$$

est parallèle à la tangente à (C), tout le long de la génératrice.

Donc la surface polaire est développable et son plan tangent est le plan normal de la courbe (C).

On obtient l'arête de rebroussement de cette surface par un calcul analogue au précédent; on trouve, en appelant H le point de cette arête qui est sur (B) :

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \mathrm{R'T}.\vec{\mathrm{B}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \mathrm{R}.\vec{\mathrm{N}}\right) - \mathrm{R'T}.\vec{\mathrm{B}}.$$

170. **Développées gauches des courbes planes.** — La théorie précédente s'applique naturellement aux courbes planes, et doit comprendre comme cas particulier les résultats déjà indiqués aux nos 107 et 108. Pour une courbe plane, T est infini, donc l'angle φ est constant; en particulier on peut prendre φ nul, ce qui donne l'ensemble des normales principales, dans le plan de la courbe. La développée correspondante est la développée plane de la courbe, soit (E_0).

Les autres développées sont situées sur le cylindre ayant (E_0) pour section droite : c'est la surface polaire. Comme l'angle en M est constant, il s'ensuit que IN varie proportionnellement à IM et par suite à l'arc de la développée plane (E_0), lieu de I. Le lieu de N s'obtient

éléments de réduction du premier système

$$\mathcal{R}' = \frac{\quad}{dt}, \qquad \mathcal{M} = \frac{\quad}{dt}.$$

On étendrait de même les règles de dérivation et la notion de *système fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables.*

Considérons encore le cas où un système (Σ), fonction de t, est défini par ses éléments de réduction par rapport à un point P dont la position dépend aussi de t. Par rapport à un point O fixe les éléments de réduction de (Σ) et du système dérivé sont

$$\vec{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{d\mathcal{R}}$$

Les éléments de réduction des mêmes systèmes par rapport au point mobile P sont

et et

Donc (n° 86)

Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}'_P}$ n'est donc plus, en général, la dérivée de $\mathcal{M}_P$ (1).

194. Équivalence et opérations élémentaires. — Considérons toujours un système d'un nombre fini de vecteurs; on appelle *opération élémentaire* effectuée sur ce système, l'une des trois opérations suivantes portant sur certains vecteurs du système :

1° Glissement d'un vecteur sur sa ligne d'action;
2° Substitution à plusieurs vecteurs concourants de leur résultante;
3° Substitution à un vecteur passant par un point A de plusieurs

(1) Suivant la remarque faite au n° 97 la dérivée de $\overrightarrow{OP}$ ne dépend pas du point fixe O, on peut donc écrire d'une manière abrégée

$$\frac{\quad}{dt} \qquad \frac{\quad}{dt}$$

égale à

Ceci étant posé, il résulte de ce qui précède que *le système de vecteurs est équivalent à un vecteur unique :*

(cas d'un ensemble fini);

(cas de la distribution linéaire, ds = élément d'arc de la courbe);

$\vec{\mathcal{R}}$

(cas de la distribution superficielle, $d\sigma$ = élément d'aire de la surface);

$$\vec{\mathcal{R}} = \left[\int\!\!\int\!\!\int \delta(\mathrm{A})\,dx\,dy\,dz\right]\vec{u}$$

(cas de la distribution spatiale).

On suppose implicitement que la somme ou l'intégrale des coefficients n'est pas nulle.

En outre, la ligne d'action de ce vecteur unique $\vec{\mathcal{R}}$ *passe par un point* G, *qui ne dépend que des coefficients* m *ou* δ *et non du vecteur* $\vec{u}$; c'est-à-dire que si l'on remplace le vecteur $\vec{u}$ par un autre $\vec{u'}$, sans changer les coefficients, le nouveau système est équivalent à un vecteur $\vec{\mathcal{R}'}$ dont la ligne d'action coupe celle de $\vec{\mathcal{R}}$ précisément au point G et cela quel que soit $\vec{u'}$. *Ce point se nomme le centre des vecteurs parallèles caractérisés par les coefficients* m *ou* δ.

Nous allons démontrer la propriété précédente et indiquer en même temps la détermination du point fixe G. Faisons par exemple la démonstration dans le cas d'une distribution continue en volume. La résultante générale et le moment résultant du système de vecteurs

sont respectivement (n° 195)

$$\vec{\mathcal{R}} = \iiint \vec{u}.\delta(\mathrm{A}).dx\,dy\,dz = \vec{u}.\iiint \delta(\mathrm{A}).dx\,dy\,dz = \vec{u}.\mathrm{M},$$

$$\vec{\mathfrak{M}} = \iiint \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \vec{u}.\delta(\mathrm{A}).dx\,dy\,dz = \left[\iiint \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\delta(\mathrm{A}).dx\,dy\,dz\right] \wedge \vec{u}.$$

$\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{\mathcal{R}}$ étant perpendiculaires, le système est équivalent à un vecteur unique et l'on obtient un point I de ce vecteur en cherchant une solution de l'équation

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} \wedge \vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathfrak{M}} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{M}.(\quad \vec{u} = \quad z\Big] \wedge \vec{u}.$$

On obtient une solution particulière en égalant les multiplicateurs de $\vec{u}$ dans les deux membres, d'où une position particulière G de I

$$\mathrm{M}.\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \iiint \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\delta(\mathrm{A}).dx.dy.dz.$$

Le point G ainsi défini est bien indépendant du vecteur $\vec{u}$; sa détermination se ramène au calcul de deux intégrales triples, l'une scalaire, pour déterminer M (somme des coefficients m), l'autre vectorielle, pour déterminer $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$.

Si l'on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées du point G, par x, y, z celles du point variable A, on obtient en projetant l'équation vectorielle

$$\mathrm{M}\,\xi = \iiint \delta x\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mathrm{M}\,\eta = \iiint \delta y\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mathrm{M}\,\zeta = \iiint \delta z\,dx\,dy\,dz.$$

On peut encore remarquer que si l'on fait coïncider l'origine O avec le centre G

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = 0,$$

l'équation vectorielle donne

$$\iiint \overrightarrow{\mathrm{GA}}.$$

218. Mouvement de rotation et de glissement. — On dit qu'un corps solide (S) est animé d'un mouvement de rotation et de glissement autour d'une droite (Δ) du corps de repère (Σ) si deux points A, B de (S) restent constamment sur cette droite (Δ). La droite AB reste constamment confondue avec la droite (Δ), qui s'appelle *l'axe de rotation et de glissement*. Tout point de (S) décrit une courbe tracée sur un cylindre de révolution d'axe (Δ).

La position de (S) est déterminée par la position d'un de ses points A sur Oz $\left(\text{définie par exemple par la mesure } \lambda \text{ de } \overrightarrow{OA}\right)$, et par la position d'un demi-plan passant par AB (définie par un angle φ comme pour le mouvement de rotation). Le mouvement de (S) est caractérisé par la variation de λ et φ en fonction de t, et le mouvement d'un de ses points M est donné par

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}$$

x, y, z sont les coordonnées fixes de M dans (S) par rapport aux axes rectangulaires d'origine A, de vecteurs unitaires $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{k}$ (*fig.* 89).

La vitesse de M a la même expression que pour le mouvement de rotation avec un terme en plus provenant de la dérivée de λ

$$= \omega \wedge OM + (k.\lambda') = MO \wedge \omega + (k.\lambda').$$

La vitesse de M *est le moment par rapport à* M *d'un système de vecteurs ayant pour résultante générale* $\vec{\omega}$, *et pour moment résultant par rapport à* O *le vecteur* $\vec{k}.\lambda'$. Le premier de ces vecteurs porté par Oz, et défini à un glissement près sur Oz, s'appelle toujours la « *rotation du solide* ». Le second $\vec{k}.\lambda'$ est la vitesse de A ou de tout autre point de (S) se déplaçant sur (Δ); on l'appelle la *vitesse de glissement* de (S). L'axe (Δ) de rotation et de glissement est l'axe central du système de vecteurs qu'on vient de définir, puisque, pour un point de cet axe, les éléments de réduction $\vec{\omega}$ et $\vec{k}.\lambda'$ sont parallèles à l'axe (n° 200).

Donc (n° 183) : *la vitesse de tout point* M *de* (S), *à un instant t*, *est le moment par rapport à* M *d'un système de vecteurs* (σ) *ayant pour résultante générale* $\vec{\mathcal{R}}$ *et pour moment résultant par rapport à* A, $\vec{\mathfrak{M}}_A = \vec{v}_A$.

pendant de M. Cette démonstration se déduit de la comparaison (n° 214) avec les champs de moments (*voir* la note du n° 183).

c) Pour dériver $\overrightarrow{AM}$, on peut aussi le considérer comme fonction du temps par l'intermédiaire des angles d'Euler θ, ψ, φ fixant la position du trièdre de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lié à (S) par rapport à un trièdre fixé à (Σ), de vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$. On a ainsi, en appliquant la règle des fonctions composées pour une fonction vectorielle de trois variables,

$$\frac{d\left(\overrightarrow{AM}\right)}{dt} = \frac{\partial\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\partial\psi}\cdot\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\partial\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Les termes du second membre ne sont autre chose que les vitesses du vecteur $\overrightarrow{AM}$, dans les mouvements fictifs obtenus en faisant varier un des angles seul, et laissant les deux autres constants. Ces mouvements sont des mouvements de rotation respectivement autour de (*voir* la définition des angles d'Euler, n° 63) :

1° L'axe $\overrightarrow{AI}$ commun au plan $\vec{i}$, $\vec{j}$ et au plan $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$;

2° L'axe $\vec{K}$ du trièdre de (Σ);

3° L'axe $\vec{k}$ du trièdre de (S).

Les vitesses du vecteur sont donc respectivement, d'après le résultat du n° 217,

$$\frac{\partial\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\partial\theta}.\theta' = \overrightarrow{MA} \wedge \left(\overrightarrow{AI}.\theta'\right), \qquad \frac{\partial\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\partial\psi}.\psi' = \overrightarrow{MA} \wedge \left(\vec{K}.\psi'\right),$$

$$\frac{\partial\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\partial\varphi}.\varphi' = \overrightarrow{MA} \wedge \left(\vec{k}.\varphi'\right),$$

d'où la vitesse de M,

$$\overrightarrow{MA} \wedge \left(\overrightarrow{AI}.\theta' + \vec{K}.\psi' + \vec{k}.\varphi'\right).$$

Ceci donne une nouvelle expression du vecteur $\vec{\omega}$ que nous retrouverons plus loin comme conséquence de la composition des vitesses.

d) Remarquons enfin que ces diverses démonstrations faites à partir d'un corps solide (Σ) déterminé ne font pas état du principe de l'indépendance de l'horloge et des systèmes de repères.

l'équation du n° 200,

$$\wedge \omega = v_A - \qquad (\vec{\omega})^2$$

ou encore

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\omega \wedge v_A}{(\vec{\omega})^2} + \lambda\vec{\omega}.$$

Pour tout point I de cet axe les éléments de réduction $\vec{\omega}$ et $\vec{v}_I$ sont parallèles à l'axe et l'on a

$$\vec{} \quad . \vec{}$$

La vitesse d'un point M est donnée par

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM} = k.\vec{\omega} + \overrightarrow{MI} \wedge \vec{\omega},$$

elle est donc la même que s'il y avait à cet instant un mouvement de rotation et glissement autour de (Δ), mouvement qu'on peut même supposer hélicoïdal uniforme (n° 218). Donc

Pour tout mouvement d'un corps solide (S), *si, à un instant t,* $\vec{\omega}.\vec{v}_A$ *n'est pas nul, il existe un mouvement hélicoïdal uniforme tangent.*

L'axe de ce mouvement est l'axe central du système (σ); on l'appelle l'*axe instantané de rotation et de glissement;* $\vec{\omega}$ est, comme il a été dit, la rotation instantanée; la vitesse

$$v_I = \omega.$$

est la *vitesse instantanée de glissement;* elle est égale à la projection constante de la vitesse d'un point quelconque $\vec{v}_A$ sur la rotation instantanée (n° 200). Enfin le pas du mouvement hélicoïdal est

$$v_A . \omega$$

228. Composition des vitesses d'un corps solide. — La composition des vitesses d'un point entraîne immédiatement la règle de composition des vitesses d'un solide, qui s'énonce sous une forme analogue :

la vitesse absolue d'un corps solide (C) [par rapport à un corps solide (Σ)] *est égale à la somme de sa vitesse relative* [par rapport à un corps solide (S)] *et de la vitesse d'entraînement* [vitesse de (S) par rapport à (Σ)],

$$(\sigma_a) = (\sigma_r) + (\sigma_e)$$

Cette somme s'entend bien entendu au sens de la somme de systèmes de vecteurs (n° 189), et à un instant donné t. Effectivement la vitesse absolue d'un point quelconque M de S est donnée, à l'instant considéré, par la formule

$$\sigma_e) + \quad \sigma_r) = \mathrm{Mom}_M[(\sigma_e) \cdot$$

Les systèmes (σ_a) et $[(\sigma_e) + (\sigma_r)]$ ayant même moment par rapport à tout point de l'espace sont bien équivalents (n° 186).

---

second membre serait la vitesse de M si x, y, z étaient constants : c'est donc sa vitesse d'entraînement; le deuxième crochet serait la vitesse de M si $\overrightarrow{OA}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étaient constants : c'est donc sa vitesse relative. D'où la relation

Dérivons une seconde fois

$$d^2(\overrightarrow{OM})$$

$$+ 2\left[\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}\right].$$

Le premier membre est l'accélération absolue du point M; le premier crochet du deuxième membre serait l'accélération de M si x, y, z étaient constants : c'est donc son accélération d'entraînement; le deuxième crochet serait l'accélération de M si $\overrightarrow{OA}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étaient constants : c'est donc son accélération relative; enfin dans le troisième crochet remplaçons les dérivées des vecteurs par leurs valeurs (n° 219) en fonction de le rotation $\vec{\omega}$ de (S)

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{i}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \vec{k}\cdot\frac{dz}{dt}\right) = \vec{\omega}\wedge\vec{v}_r.$$

Donc

En adoptant les dénominations du n° 230 pour le mouvement des surfaces en contact s_1 et s_2, on voit qu'en chaque point m de l'axe iz, il y a contact des surfaces roulette et base; la « *vitesse de glissement en m* » *est parallèle à iz et constante sur tout l'axe; il n'y a pas de rotation de pivotement, mais une rotation de roulement également constante et parallèle à iz.*

Si l'axe instantané est fixe dans l'un des corps, il l'est aussi dans l'autre; effectivement s'il est fixe dans (S_1), $\frac{d(\overrightarrow{Am_1})}{dt}$ est parallèle à $\vec{a}$ (n° 89) et il en est par suite de même de $\frac{d(\overrightarrow{Bm_2})}{dt}$: tout point m de l'axe a donc par rapport à (S_2) une vitesse dirigée suivant $\vec{a}$; l'axe i_1z_1 glisse sur i_2z_2. Il y a mouvement de rotation et glissement (n° 218) autour de cet axe fixe.

L'égalité de $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ en tout point m de l'axe instantané entraîne notamment l'égalité respective des vecteurs correspondant à λ nul et infini, soit (n° 149)

$$\frac{\overrightarrow{Bi_2})}{}$$

Réciproquement l'égalité de ces vecteurs entraîne

c'est-à-dire le raccordement des surfaces réglées; en outre, on a

$$\frac{}{dt} \qquad \frac{d(\overrightarrow{Bm_2})}{dt}\Bigg] \wedge \vec{a} = 0;$$

la vitesse d'entraînement de tout point m de l'axe est donc parallèle à cet axe qui est par suite l'axe instantané de rotation et de glissement dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) (n° 223).

Si *l'une des surfaces est un cône*, $\overrightarrow{db_1}$ est nul, il en est par suite de même de $\overrightarrow{db_2}$ et *l'autre surface est aussi un cône*. La condition de roulement sans glissement se réduit à

$$| da_1 | =$$

σ_1 et σ_2 désignant toujours les arcs des sections C_1 et C_2 des cônes par les sphères de rayon 1 ayant pour centre les sommets. Cette condition n'impose rien aux surfaces elles-mêmes, mais précise la façon de réaliser le mouvement. Dans ce mouvement, les cônes ont un sommet commun, ils sont en contact suivant une génératrice et les courbes C_1 et C_2 roulent l'une sur l'autre sans glisser. Nous avions déjà obtenu la même condition pour le roulement avec glissement; par suite, dans ce mouvement, il n'y a jamais glissement : *si les surfaces base et roulette sont des cônes, il y a toujours roulement continu sans glissement.*

Cette notion de roulement de deux cônes permet de préciser la condition de viration de deux surfaces réglées s_1 et s_2. Si par un même point O on mène des parallèles aux génératrices de ces surfaces, on obtient deux cônes appelés « *cônes directeurs* » des surfaces. La condition

$$\left|\overrightarrow{da_1}\right| = \left|\overrightarrow{da_2}\right|,$$

nécessaire dans le roulement avec ou sans glissement de s_1 sur s_2, montre que les cônes directeurs roulent l'un sur l'autre sans glisser.

Enfin *si l'une des surfaces est un cylindre, il en est de même de l'autre;* si i_1 décrit une section droite, les vecteurs $\overrightarrow{db_1}$ et $\overrightarrow{a_1}$ sont rectangulaires, il en est de même de $\overrightarrow{db_2}$ et $\overrightarrow{a_2}$: le point i_2 décrit aussi une section droite. Comme $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ sont constants, la condition de correspondance se réduit à

$$\overrightarrow{db_1} \Big|$$

c'est-à-dire à l'égalité des arcs sur les sections droites. Le mouvement s'en déduit immédiatement : les sections droites correspondantes roulent l'une sur l'autre sans glisser, en restant dans un même plan.

ment à ces deux trièdres. Avec les notations précédentes, on a

$$\vec{\ } \quad \vec{\ } \quad \vec{\ } + z.\vec{k} = X.\vec{I} + Y.\vec{J} + Z.\vec{K}.$$

Formons les produits intérieurs du premier et du troisième membre par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, du premier et du second membre par $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$; on obtient immédiatement, en tenant compte des formules (1),

$$\begin{aligned} X &= a.i, & x &= a.I, \\ Y &= \vec{a}.\vec{j}, & y &= \vec{a}.\vec{J}, \\ Z &= \vec{a}.\vec{k}. & z &= \vec{a}.\vec{K} \end{aligned}$$

Ces formules généralisent l'expression des coordonnées d'un vecteur donnée au n° 22 et sont analogues au résultat du n° 35 *bis*. On peut les énoncer :

Les composantes x, y, z d'un vecteur par rapport à un trièdre T *sont égales aux mesures de ses projections orthogonales sur les axes du trièdre supplémentaire* T^*.

3*. **Changement de coordonnées. Substitutions contravariantes.**— Soient T' et $T^{*\prime}$ deux nouveaux trièdres supplémentaires définis par les vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$; $\vec{I}', \vec{J}', \vec{K}'$. Donnons-nous ces vecteurs par leurs composantes respectivement par rapport à T et T^* :

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}, & \vec{I}' &= A.\vec{I} + B.\vec{J} + C.\vec{K}, \\ \vec{j}' &= a'.\vec{i} + b'.\vec{j} + c'.\vec{k}, & \vec{J}' &= A'.\vec{I} + B'.\vec{J} + C'.\vec{K}, \\ ' &= a''.\iota \cdot \qquad ''.k, & \text{('} &= A''.I \quad B''.\vec{J} + C''.\vec{K}. \end{aligned}$$

Les deux *substitutions linéaires*, qui font passer des anciens vecteurs unitaires aux nouveaux, sont définies par les deux *tableaux* des coefficients

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \qquad S = \begin{Vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{Vmatrix}$$

Pour établir les relations qui existent entre les éléments de ces deux tableaux, écrivons que les vecteurs unitaires des trièdres supplémentaires T' et $T^{*\prime}$ vérifient les relations

En tenant compte des équations (1), on obtient les neuf relations

$$\cdot\, b\mathrm{B} \qquad\qquad ' = 0, \qquad a\mathrm{A}''-$$

$$''\mathrm{A} + \ldots + c''\mathrm{C} = 0, \qquad\qquad a''\mathrm{A}'' + \ldots$$

On peut résoudre ces équations soit par rapport aux A, B, C, ..., soit par rapport aux a, b, ... Désignons par d et D les déterminants déduits des tableaux s et S; d'après les propriétés connues des déterminants et des équations linéaires (*voir* n° 34), cette résolution montre que, dans les tableaux s et S, chaque terme est égal au mineur (ou coefficient) du terme correspondant de l'autre, divisé par son déterminant :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{d}(b'c'' - c'b''), \qquad \mathrm{B} = \qquad - a'c''), \qquad \frac{1}{d}(a'b'' - b'a''),$$

$$\frac{1}{\mathrm{D}} \qquad\qquad c = \frac{1}{\mathrm{D}}(\mathrm{A}'\mathrm{B}''-$$

Les déterminants d et D eux-mêmes sont inverses l'un de l'autre.

On peut aussi obtenir ces formules en partant des relations

il suffit d'y remplacer $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ par leurs expressions en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, puis, en effectuant les produits extérieurs, de tenir compte de (1'); cette méthode généralise celle qui a été employée au n° 61 pour les relations entre les termes du déterminant des neuf cosinus.

En particulier, si T et T' sont trirectangles, ils sont respectivement confondus avec leurs supplémentaires T* et T*' : les deux tableaux s et S ont les mêmes termes et forment un système de neuf cosinus; les relations indiquées se confondent avec celles du n° 61.

Les expressions de $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$; $\vec{\mathrm{I}}'$, $\vec{\mathrm{J}}'$, $\vec{\mathrm{K}}'$ peuvent être résolues en $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; $\vec{\mathrm{I}}$, $\vec{\mathrm{J}}$, $\vec{\mathrm{K}}$ comme des équations linéaires entre scalaires. Comme on connaît les mineurs des tableaux s et S on obtient immédiatement

$$\vec{\mathrm{J}} = b.\vec{\mathrm{I}}'\cdot$$

$$\vec{k} = \mathrm{C}.\vec{i}'$$

un vecteur $\vec{p}$ le scalaire ou le vecteur

En particulier, si $\vec{p}$ est un *vecteur unitaire* cette expression se nomme « *la dérivée du champ de scalaires ou de vecteurs suivant l'axe défini par $\vec{p}$* ».

Dans la dérivée suivant un vecteur $\vec{p}$, les parenthèses sont les *composantes* de $\vec{p}$ sur le *trièdre tangent* ou encore ses *projections* sur le trièdre *supplémentaire* (n° 2*); elles sont contravariantes des dérivées partielles; il en résulte que cette dérivée est bien indépendante du système de coordonnées curvilignes [1].

La dérivée suivant un vecteur étant une expression linéaire par rapport aux dérivées partielles, on en déduit immédiatement (n^{os} 86 et 137) *les règles de dérivation* suivant un vecteur des sommes et produits :

$$(\lambda.\mu)'_{\vec{p}} = \quad \mu + \lambda.\mu'_{\vec{p}}; \qquad (\vec{a}.$$

$$.\vec{a})'_{\vec{p}} \qquad\qquad (\vec{a}\,,\;\vec{b})'_{\vec{p}} = \;'_{\vec{p}} \wedge \vec{b}\,.$$

12*. Gradient d'un champ de scalaires. — L'expression de la différentielle d'un champ de scalaires et celle de sa dérivée par rapport à un vecteur admettent une interprétation géométrique importante. La différentielle du champ

$$d\lambda = \lambda'_u.du + \lambda'_v.dv + \lambda'_w dw$$

peut être considérée comme le produit intérieur du vecteur $d(\overrightarrow{OM})$, ayant pour composantes du, dv, dw par rapport au trièdre tangent, par le vecteur ayant pour composantes λ'_u, λ'_v, λ'_w par rapport au trièdre supplémentaire (n° 5*). Ce second vecteur a une définition indépendante du système de coordonnées curvilignes : en effet ses composantes sont des variables covariantes des vecteurs du trièdre tangent et contravariantes des vecteurs du trièdre supplémentaire. La dérivée par rapport à un vecteur $\vec{p}$ admet une interprétation

(1) Elle est d'ailleurs égale à la dérivée $\dfrac{d\lambda}{d\rho}$ ou $\dfrac{d\vec{a}}{d\rho}$, quand le point M se déplace sur une direction parallèle à $\vec{p}$, la variable ρ étant le rapport du déplacement au vecteur $\vec{p}$.

analogue, le vecteur $\vec{p}$ remplaçant $d(\overrightarrow{OM})$. Ces résultats conduisent à introduire la notion suivante :

On appelle « gradient du champ de scalaires λ », en un point A, le vecteur qui (dans un système de coordonnées curvilignes) a pour composantes par rapport au trièdre supplémentaire du trièdre tangent en A (ou encore pour projections sur les axes du trièdre tangent) les dérivées partielles de λ par rapport aux coordonnées.

Avec les notations admises le vecteur gradient a pour expression

nous le représenterons par l'une des notations

$$\vec{D}.\lambda \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}.\lambda.$$

Dans la première on peut considérer que $\vec{D}$ désigne l'« *opérateur* »

$$\vec{D} = \vec{U}\cdot\frac{\partial}{\partial} + \vec{V}\cdot\frac{\partial}{} + \vec{W}\ \partial$$

Le vecteur gradient est alors le produit du vecteur symbolique $\vec{D}$ par le scalaire λ.

Dans le cas d'un système de *coordonnées rectangulaires*, l'expression de cet opérateur se réduit à

$$\vec{D} = \vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}.$$

Dans le cas des *coordonnées semi-polaires* et des *coordonnées sphériques* (n° 7*), avec les notations adoptées, on a

$$\vec{D} = \vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\vec{p}}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

Cette définition acquise :

La différentielle d'un champ de scalaires est égale au produit intérieur de son gradient par la différentielle de $\overrightarrow{OM}$.

La dérivée d'un champ de scalaires par rapport à un vecteur $\vec{p}$ *est*

égale au produit intérieur de son gradient par ce vecteur :

$$\lambda'_{\vec{p}} = \overrightarrow{\text{grad}}.\lambda.\vec{p} \qquad = (\vec{D}.\lambda).\vec{p}.$$

En rapprochant la notion de gradient de celle de surface de niveau (n° 8*) on obtient la propriété géométrique suivante, qui est caractéristique :

En tout point, le gradient d'un champ de scalaires est normal à la surface de niveau qui passe en ce point; sa mesure sur la normale orientée est la dérivée du champ de scalaires suivant cette normale.

Effectivement, pour tout chemin tracé sur la surface de niveau, $d\lambda$ est nul; de sorte que, en appelant $\vec{n}$ le vecteur unitaire sur la normale,

$$\vec{n}.d(\overrightarrow{\text{OM}}) = \text{o} \quad \text{entraîne} \quad \overrightarrow{\text{grad}}.\lambda.d(\overrightarrow{\text{OM}}) = \text{o}.$$

On établit ainsi la première partie du théorème; d'autre part, d'après la propriété précédente,

$$\lambda'_{\vec{n}} = \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}.\lambda;$$

ceci montre que $\overrightarrow{\text{grad}}.\lambda$, parallèle à $\vec{n}$, a pour mesure $\lambda'_{\vec{n}}$ sur l'axe défini par la normale orientée. On a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}.\lambda = \vec{n}.\lambda'_{\vec{n}}.$$

13*. Invariants différentiels d'un champ de vecteurs. — Nous avons vu au numéro précédent que le vecteur gradient pouvait se déduire d'un champ de scalaires en faisant le produit du vecteur symbolique $\vec{D}$ par le scalaire; de même, étant donné un champ de vecteurs $\vec{a}$, on peut effectuer les produits intérieur ou extérieur du vecteur symbolique par le vecteur du champ. On obtient ainsi deux expressions différentielles dont la valeur est indépendante du système de coordonnées curvilignes puisque les deux systèmes de trois vecteurs sont contravariants. Ce sont, avec des notations qui généralisent évidemment celle du vecteur gradient,

$$\vec{D}.\vec{a} = \vec{U}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial u} + \vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial v} + \vec{W}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial w}$$

et

La première est un scalaire et la seconde un vecteur; nous allons étudier

Chaque invariant est une somme de trois termes dont chacun est le produit d'une dérivée suivant un vecteur $\vec{p}$ (qui est $\vec{u}$, $\vec{v}$ ou $\vec{w}$) par un autre vecteur $\vec{P}$ (qui est $\vec{U}$, $\vec{V}$ ou $\vec{W}$) :

$$\Lambda'_{\vec{p}}.\vec{P}, \quad \text{ou} \quad \vec{A}'_{\vec{p}}.\vec{P}, \quad \text{ou} \quad \vec{P} \wedge \vec{A}'_{\vec{p}}.$$

Remplaçons dans ces produits le scalaire Λ ou le vecteur $\vec{A}$ par l'un des produits précédents et cherchons à mettre en facteur un terme indépendant de $\vec{p}$ et $\vec{P}$; on a immédiatement, d'après les formules de la fin du n° 11*,

$$\vec{P} \wedge (\lambda.\vec{a})'_{\vec{p}} = \lambda.\left(\vec{P} \wedge \vec{a}'_{\vec{p}}\right) + \left(\lambda'_{\vec{p}}.\vec{P}\right) \wedge \vec{a},$$

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)'_{\vec{p}}.\vec{P} = \vec{b}.\left(\vec{P} \wedge \vec{a}'_{\vec{p}}\right) - \vec{a}.\left(\vec{P} \wedge \vec{b}'_{\vec{p}}\right).$$

Remplaçons $\vec{p}$ et $\vec{P}$ par les couples de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{U}$; $\vec{v}$, $\vec{V}$; $\vec{w}$, $\vec{W}$ et sommons; la mise en facteur est faite et l'on obtient les formules

$$\overrightarrow{\text{grad.}}(\lambda.\mu) = \lambda.\overrightarrow{\text{grad.}}\mu + \mu.\overrightarrow{\text{grad.}}\lambda,$$

$$\vec{D}.(\lambda.\vec{a}) = \lambda.(\vec{D}.\vec{a}) + \vec{a}.(\vec{D}.\lambda),$$

$$\vec{a}, \quad \overrightarrow{\text{rot.}}(\lambda.\vec{a}) = \lambda.\overrightarrow{\text{rot.}\vec{a}} + \overrightarrow{\text{grad.}}\lambda \wedge \vec{a},$$

$$\vec{b}, \quad \text{div.}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b}.\overrightarrow{\text{rot.}\vec{a}} - \vec{a}.\overrightarrow{\text{rot.}\vec{b}}.$$

Le calcul est un peu moins immédiat pour le gradient d'un produit intérieur et le rotationnel d'un produit extérieur. Reprenons le calcul précédent, nous avons

$$\vec{P} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)'_{\vec{p}} = \vec{P} \wedge \left(\vec{a}'_{\vec{p}} \qquad \wedge \left(\vec{a} \wedge\right.\right.$$

Transformons les seconds membres en appliquant la formule du double produit extérieur (n° 35); dans la première formule nous introduirons le double produit, dans la seconde nous remplacerons au contraire les doubles

En considérant toujours des coordonnées rectangulaires, il faut faire la somme des dérivées par rapport à x, y, z des expressions

$$\partial a_z \qquad \partial a_y \qquad \frac{}{\partial z} \qquad \frac{\partial a_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial a_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

cette somme est nulle, en raison encore de la règle d'interversion des dérivées secondes.

III. La *divergence du gradient de* λ s'appelle le *Laplacien de* λ et se représente ordinairement par la notation

$$\Delta\lambda = \vec{\mathrm{D}}.(\vec{\mathrm{D}}.\lambda) = \mathrm{div}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}.\lambda.$$

En coordonnées rectangulaires son expression est

$$\Delta\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}.$$

L'expression du second membre reste par suite invariante pour un changement d'axes de coordonnées rectangulaires.

Par analogie on appelle *Laplacien d'un vecteur* $\vec{a}$ le vecteur défini en coordonnées rectangulaires par l'expression

$$\frac{\partial^2 \vec{a}}{} \qquad \frac{}{\partial z^2}$$

Cette expression est invariante pour un changement d'axes puisque les formules de transformation sont les mêmes que pour un scalaire.

IV. Le *gradient d'une divergence* n'a pas de nom spécial. On formera immédiatement ses composantes en coordonnées rectangulaires.

V. Le *rotationnel d'un rotationnel* s'exprime au moyen des invariants précédents, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}.\mathrm{div}.\vec{a} - \text{Laplacien } \vec{a}.$$

Il suffit de vérifier par exemple en coordonnées rectangulaires.

18*. **Formule de Green.** — Considérons un volume fini V, limité par une surface S sans points doubles, et un champ de vecteurs $\vec{a}$, défini ainsi que ses dérivées dans un domaine comprenant V. Moyennant des conditions assez larges de continuité pour S, on a l'égalité des intégrales de volume et de

devient

$$\int\int_S \lambda.\vec{n}_e.d\sigma = \int\int\int_V \overrightarrow{\text{grad}}.\lambda.dx.dy.dz.$$

II. *Formule du rotationnel.* — Prenons pour vecteur $\acute{N}$ le produit extérieur d'un vecteur $\vec{\omega}$ par $\vec{n}_e$. En posant

$$\vec{\omega}\wedge\vec{n}_e = \vec{i}.(\vec{A}.\vec{n}_e) + \vec{j}.(\vec{B}.\vec{n}_e) + \vec{k}.(\vec{C}.\vec{n}_e),$$

$$\acute{A} = -\acute{\omega}\wedge\acute{i}, \qquad \acute{B} = -\acute{\omega}\wedge\acute{j}, \qquad \acute{C} = -\acute{\omega}\wedge\acute{k}.$$

En appliquant la formule du n° 16*,

$$\text{div}.(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{a} - \vec{a}.\overrightarrow{\text{rot}}.\vec{b}$$

et en tenant compte de ce que les rotationnels de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont nuls, on obtient

$$\int\int_S [\vec{\omega}\wedge\vec{n}_e].d\sigma = -\int\int\int_V \overrightarrow{\text{rot}}.\vec{\omega}.dx.dy.dz.$$

Formule de Green dans le plan. — La démonstration de la formule de Green et des formules qui la généralisent s'étendent au cas d'une intégrale double étendue à une aire plane qu'on peut transformer en une intégrale curviligne étendue au contour limitant l'aire. On suppose naturellement les vecteurs du champ parallèles au plan, la divergence se réduit à une somme de deux termes, le rotationnel est un vecteur normal au plan.

20*. — **Formule de Stokes.** — Étant donnée une portion Σ d'une surface S, limitée par un contour fermé C et située dans un champ de vecteurs $\vec{a}$, on a

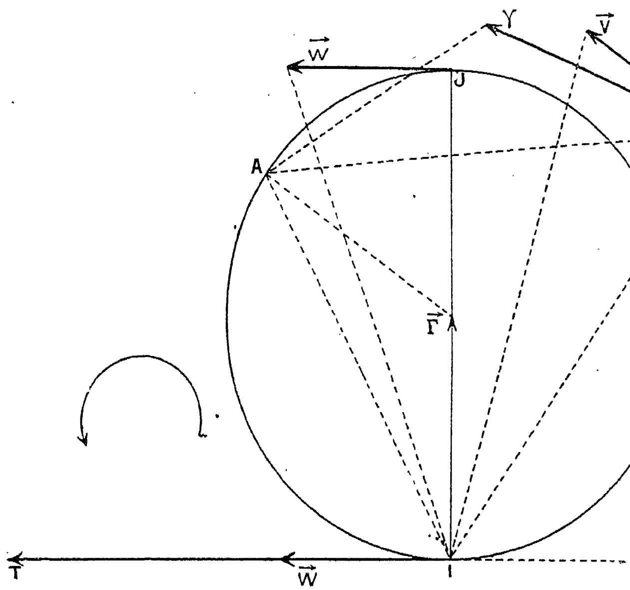
$$\int\int_\Sigma (\vec{n}.\text{rot}.\vec{a}).d\sigma = \int_C (\vec{a}.\vec{p}).ds,$$

ds désigne la différentielle de l'arc de courbe sur C; $\vec{p}$ est le vecteur unitaire sur la tangente à cette courbe, dans le sens des *s* croissants; enfin $\vec{n}$ *est la normale à la surface dirigée dans le sens positif par rapport au sens de rotation choisi sur la courbe* (n° 17); cette dernière condition suppose que Σ vérifie certaines conditions de continuité qui seront précisées au cours de la démonstration.

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Stokes;* l'intégrale curviligne du second membre est quelquefois appelée le *travail ou la circulation du vecteur* $\vec{a}$ *sur la courbe fermée* C; l'intégrale de surface du pre-

à P_1 est défini de la manière suivante. Soient O_1 et O des points fixes, O_1x_1 et Ox des demi-droites fixes, respectivement dans P_1 et P_2; le mouvement de P_2 est défini quand on se donne en fonction du temps le vecteur $\overrightarrow{O_1O}$ et

Fig. 1**.



l'angle $\theta = (O_1x_1, Ox)$; on en déduit, par dérivation, la vitesse du point O et la vitesse angulaire

$$\overline{dt} \qquad \overline{dt}.$$

Or la formule (1)

$$\vec{v}_0 = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IO}$$

donne en résolvant la division géométrique (n° 35)

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{\omega^2}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0\right) = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \wedge \vec{v}_0\right),$$

qui définit la position de I dans le plan mobile P_2; si dans cette expression on considère ω et $\vec{v}_0$ comme des fonctions de t, on a ainsi l'équation vectorielle de la roulette C_2 dans le plan P_2. L'équation de la base C_1 dans le plan P_1 s'en déduit immédiatement

$$\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \wedge \vec{v}_0\right).$$

Appelons $\acute{n}$ un vecteur unité pris sur la normale commune en M à E_1 et E_2 $\vec{v}_1$, étant normal à $\vec{n}$, peut s'écrire

$$\cdot \wedge \vec{n});$$

d'où l'on tire (1**)

$$\vec{w}.\vec{v}_1 = \lambda_1.\omega.\overrightarrow{IT}.(\vec{k} \wedge \vec{n}) = \lambda_1.\omega.\vec{n}.(\overrightarrow{IT} \wedge \vec{k}) = \lambda_1.\omega.(\vec{n}.\vec{IJ}),$$
$$v_1^2 = \lambda_1^2.$$

En transportant dans l'égalité de la page précédente on en déduit λ_1,

$$\lambda_1 = \omega.(\vec{n}.\vec{IJ}).\frac{\overline{MP_1}}{\overline{IP_1}}.$$

Un calcul analogue peut se répéter pour obtenir

en dérivant dans le plan P_2; il se déduit du précédent en remplaçant les vitesses absolues des vecteurs par leurs vitesses relatives; on obtient, en appelant P_2 le centre de courbure de E_2 en M,

$$\lambda_2 = \omega.(\vec{n}.\vec{IJ}).\frac{\overline{MP_2}}{\quad}.$$

Mais, d'autre part, la différence des deux vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ étant la vitesse d'entraînement de m peut s'écrire : $\omega.\overline{IM}(\vec{k} \wedge \vec{n})$; la différence $\lambda_1 - \lambda_2$ est donc égale à $\omega.\overline{IM}$; on obtient finalement l'égalité

On peut simplifier cette relation en remarquant que si l'on retranche 1 à chacun des rapports de la différence entre parenthèses, leurs numérateurs prennent la valeur commune $\overline{MI}$. D'autre part, en introduisant comme au numéro précédent le point N d'intersection de IM avec la circonférence des inflexions, le produit $(\vec{n}.\vec{IJ})$ est égal à $\overline{IN}$. Finalement, on obtient

Pages.
21. Cas particuliers 30
22. Expression du produit en fonction des projections 30
23. Applications 31

V. — *Produit extérieur de deux vecteurs.*

24. Définition du produit extérieur 34
25. Propriétés du produit extérieur 35
26. Démonstration des propriétés précédentes 36
27. Projections du produit 39
28. Vecteurs dans un plan orienté 41
29. Identité de Lagrange 43
30. Division géométrique 43

VI. — *Produits composés.*

31. Produit $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})$ 45
32. Produit mixte $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$ 45
33. Vecteurs coplanaires 47
34. Équation linéaire 48
35. Double produit extérieur : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ 49
35 *bis*. Vecteur défini par ses projections orthogonales 51

VII. — *Homogénéité et symétrie.*

36. Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées 53
37. Formules de dimensions 55
38. Dimensions des opérations vectorielles 56
39. Grandeurs axiales et grandeurs polaires 58
40. Axialité des opérations vectorielles 59

CHAPITRE II.

Notions de Géométrie analytique.

41. Objet du Chapitre 62

I. — *Angles et distances en Géométrie plane.*

42. Coordonnées rectangulaires 62
43. Distance de deux points 64
44. Détermination d'une demi-droite ou droite dirigée 64
45. Angle de deux droites dirigées 66
46. Droite non dirigée 67
47. Paramètres directeurs d'une droite 68

CHAPITRE VI.

Cinématique du point et du corps solide.

I. — *Cinématique du point.*

		Pages.
209.	Repère et horloge	311
210.	Vitesse d'un point	312
211.	Vitesse d'un vecteur	313
212.	Accélération d'un point	314

II. — *Distribution des vitesses dans un corps solide.*

213.	Repères d'un corps solide	315
214.	Relation entre les vitesses de deux points	317
215.	Mouvements tangents	318
216.	Mouvement de translation	319
217.	Mouvement de rotation autour d'une droite	320
218.	Mouvement de rotation et de glissement	323
219.	Distribution des vitesses dans un mouvement quelconque	324
220.	Vitesse d'un corps solide	326
221.	Axe instantané de rotation et de glissement	329
222.	Rotation ou translation tangentes	331
223.	Propriétés des vitesses	331
224.	Mouvement du trièdre de Frenet	332

III. — *Composition des mouvements.*

225.	Changement du système de comparaison	334
226.	Composition des vitesses d'un point et d'un vecteur	335
227.	Composition des accélérations	337
228.	Composition des vitesses d'un corps solide	340
229.	Décomposition de la vitesse d'un corps solide	342
230.	Mouvement de surfaces en contact	343

IV. — *Mouvement continu d'un corps solide.*

231.	Surfaces base et roulette	345
232.	Contact des surfaces base et roulette	347
233.	Condition de viration de deux surfaces réglées	349
234.	Viration des surfaces non développables	350
235.	Viration des surfaces développables	352
236.	Roulement continu sans glissement	353
237.	Roulement des surfaces réglées	354
238.	Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe	357
239.	Mouvement d'un corps solide dont un plan glisse sur un plan fixe	357

CALCUL VECTORIEL

THÉORIE

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET CINÉMATIQUES

Le module d'une somme géométrique est au plus égal à la somme des modules

Cette inégalité est en évidence sur la figure 3, où la longueur de la ligne droite AL est au plus égale à la somme des longueurs des côtés de la ligne brisée AB + BC + ... L'égalité ne peut avoir lieu que si les vecteurs sont tous parallèles entre eux et de même sens.

On n'additionne que des *grandeurs vectorielles de même espèce*, ou tout au moins de mêmes dimensions; cette addition a ordinairement une interprétation physique simple, différente suivant les grandeurs.

Exemples :

La somme de deux forces est la force qui a le même effet que l'ensemble des deux autres (supposées de même point d'application);

La somme des vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement donne la vitesse absolue.

9. **Vecteur opposé.** — Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est tout vecteur équipollent à $\overrightarrow{BA}$. C'est le seul vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{AB}$, donne le vecteur nul

C'est encore le vecteur produit : $(-1).\overrightarrow{AB}$; pour cette raison, on le représente ordinairement par $-\overrightarrow{AB}$, ou $-\vec{a}$ dans le cas d'une seule lettre (¹).

10. **Différence.** — Soustraire $\vec{b}$ de $\vec{a}$ c'est chercher un vecteur $\vec{x}$ tel que

$$\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}.$$

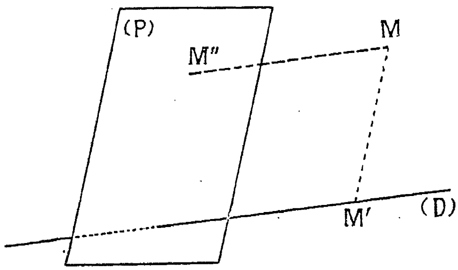
Un tel vecteur existe et est défini à une équipollence près; c'est la

(¹) Deux vecteurs opposés qui ont en outre même support sont souvent dits *directement opposés*.

III. — PROJECTIONS ET AXES DE REPÈRE.

13. Projections (**parallèles**). — On se donne un *support*, qui est une droite D ou un plan P, et une *direction de projetantes* qui est un plan P ou une droite D. (On suppose que le support et la direction de projetantes ne sont pas parallèles.)

Fig. 7.



La projection d'un point M sur le support, parallèlement à la direction de projetantes, est le point (M′ ou M″), intersection du support (droite ou plan) avec la parallèle à la direction de projetantes (plan ou droite) menée par M. *La projection d'un vecteur est le vecteur ayant pour origine et extrémité les projections de l'origine et de l'extrémité du premier.*

Les propriétés suivantes sont alors évidentes géométriquement :

1° *Les projections de deux vecteurs équipollents sur un même support ou sur des supports parallèles sont des vecteurs équipollents.*

2° *Le vecteur, projection de la somme géométrique de plusieurs vecteurs, est la somme géométrique des projections.*

3° *Tout vecteur est la somme de ses projections :*

a. *Sur une droite* D *parallèlement à un plan* P, *et sur le plan* P *parallèlement à la droite* D;

b. *Sur trois axes* Ox, Oy, Oz *formant un véritable trièdre* (*c'est-à-dire non dans un même plan*) : *sur* Ox *parallèlement au*

trièdre trirectangle, les plans des faces étant supposés opaques *vers l'extérieur du trièdre* (ou, ce qui revient au même, étant regardés de l'intérieur du trièdre), les angles droits

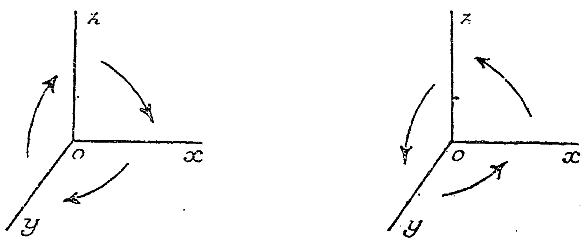
$$(Ox, Oy), \quad (Oy, Oz), \quad (Oz, Ox)$$

sont de même sens entre eux et de sens contraire aux trois angles

$$(Oy, Ox), \quad (Oz, Oy), \quad (Ox, Oz),$$

ces trois derniers étant encore de même sens entre eux (*fig.* 10).

Fig. 10.



Étant donné un trièdre Ox, y, z, on peut encore comparer à ce trièdre un *sens de rotation autour d'un axe* IZ, ou un *sens de rotation dans un plan opaque* IX, IY. On dit que ce sens de rotation est le même que le sens du trièdre si, — pour un observateur parcouru des pieds à la tête par IZ ou encore regardant le plan opaque, — il coïncide avec celui des trois premiers angles ci-dessus (Ox, Oy), (Oy, Oz), (Oz, Ox) (vus, bien entendu, de l'intérieur du trièdre). Ce sens est contraire au sens du trièdre s'il coïncide avec celui du second groupe d'angles.

Enfin, on peut encore comparer à un trièdre trirectangle Ox, y, z un trièdre quelconque $O'p, q, r$: ils sont de même sens ou de sens contraires suivant que le sens des trois angles (Ox, Oy), (Oy, Oz), (Oz, Ox), vus de l'intérieur du trièdre, est le même que celui des trois angles $(O'p, O'q)$, $(O'q, O'r)$, $(O'r, O'p)$, vus également de l'intérieur du second trièdre. Pour justifier cette définition, il faut toutefois montrer que ces trois derniers angles sont de même sens entre eux. On l'établit aisément en les comparant respectivement aux angles du trièdre trirectangle O'P, Q, R construit comme suit :

tiplication des nombres [1]

$$a \times \qquad a.b, \qquad a\,b.$$

Le produit intérieur de deux grandeurs vectorielles est une grandeur scalaire, ayant pour symbole de dimensions le produit des symboles des grandeurs vectorielles à multiplier (*voir* § VII). La définition du produit implique le choix de l'unité pour cette nouvelle espèce de grandeurs; c'est le produit scalaire des unités des deux premières, supposées parallèles et de même sens.

19. **Expressions diverses du produit intérieur.** — Le produit ainsi défini est bien indépendant des sens choisis sur les droites. Si l'on adoptait, par exemple, xx' au lieu de $x'x$, la mesure de $\vec{a}$ changerait de signe, mais aussi le cosinus (l'angle augmentant de π).

De la définition habituelle du cosinus, résulte que le produit de $\overline{a}$ par le cosinus est la mesure sur $y'y$ de la projection de $\vec{a}$; de même pour $\vec{b}$; de sorte que le produit peut se mettre sous l'une des deux formes :

$$\overline{a}.\overline{\text{proj}.b \text{ sur } x'x} \quad \text{ou} \quad \overline{b}.\overline{\text{proj}.a \text{ sur } y'y}.$$

Le trait indique qu'on prend la mesure de la projection [2].

En prenant pour sens $x'x$, $y'y$ les sens des vecteurs eux-mêmes, les mesures de ces vecteurs sont des nombres positifs égaux à leurs modules; il n'y a pas d'ambiguïté à dire que l'angle des direc-

(1) C'est la notation adoptée notamment par M. Haag (*Cours de Math. spéc.*, t. II, Chap. VIII; G.-V.).

Cette notion de « produit intérieur » est couramment utilisée dans les Cours de Mathématiques spéciales, mais on ne l'emploie encore que pour quelques questions isolées de Géométrie (comme la « formule fondamentale de la trigonométrie sphérique »), dans la Théorie des systèmes de vecteurs, et en Mécanique. Dans l'exposition des débuts de la géométrie analytique (angles et distances, droites et plans), on continue à lui préférer l'emploi du théorème des projections, pourtant moins élégant et plus malaisé.

(2) Ces deux expressions montrent encore que le produit est indépendant du sens des axes, car, si l'on changeait, par exemple, le sens de $x'x$, aucun des termes du second produit ne serait altéré, les deux termes du premier changeraient tous deux de signe.

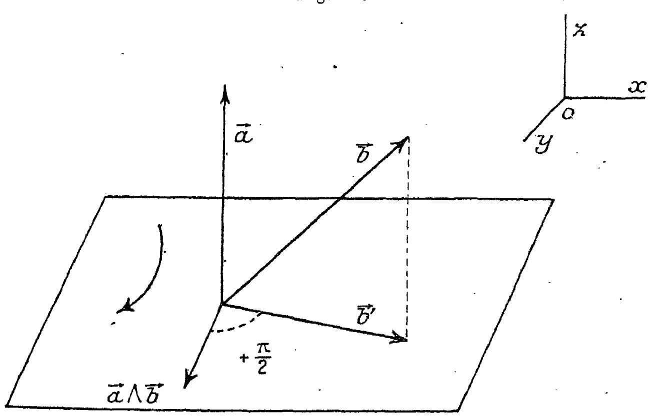
vecteur produit n'est pas non plus changée. Reste la question de sens; examinons le cas du produit par — 1 de l'un des termes du produit : le produit est bien aussi multiplié par — 1, car, dans le trièdre, si l'on change le sens de l'un des axes, il faut aussi changer le sens d'un autre axe, pour ne pas changer le sens du trièdre. On passe aisément au cas général.

Nullité. — La condition de nullité est évidente : l'aire du parallélogramme ne peut être nulle que si l'un des côtés est nul ou s'ils sont dans le prolongement l'un de l'autre.

Distributivité. — La démonstration est plus compliquée que pour le cas du produit intérieur. On peut la faire reposer sur le lemme suivant intéressant en lui-même :

Le produit extérieur d'un vecteur $\vec{a}$ par un vecteur quelconque $\vec{b}$ est égal au produit extérieur de $\vec{a}$ par la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur un plan perpendiculaire à $\vec{a}$.

Fig. 18.



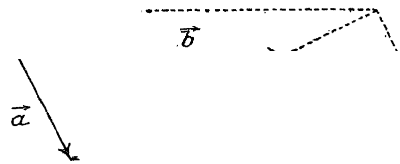
Soit $\vec{b}'$ la projection de $\vec{b}$ sur le plan (A) perpendiculaire à $\vec{a}$. Il faut établir

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{b}'.$$

Le plan des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ est perpendiculaire à (A), c'est donc le

sur les deux vecteurs. Le produit considéré est donc égal au produit de cette aire par la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b} \wedge \vec{c}$, c'est-à-dire par la projection de $\vec{a}$ sur la normale au plan $\vec{b}$, $\vec{c}$. On obtient bien, en valeur

Fig. 23.



absolue, le volume du parallélépipède. Quant au signe, il est + ou — suivant que $\vec{a}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$ sont du même côté ou de côtés différents du plan $\vec{b}$, $\vec{c}$, c'est-à-dire encore suivant que les trièdres $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{b}, \vec{c})$ sont de même sens ou de sens contraires. Comme le second est direct, la proposition est établie.

33. **Vecteurs coplanaires.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que le produit mixte*

$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$$

soit nul est : ou bien que l'un des vecteurs soit nul, ou bien que deux des vecteurs soient parallèles, ou bien que les trois vecteurs soient parallèles à un même plan.

Si l'un des vecteurs est nul, le produit est évidemment nul. Si deux des vecteurs sont parallèles, on peut toujours supposer, en les permutant circulairement au besoin, que ce soient les deux derniers $\vec{b}$ et $\vec{c}$, alors le produit extérieur $\vec{b} \wedge \vec{c}$ et par suite le produit mixte est nul. Enfin, si aucune de ces deux circonstances ne se présente, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$ ne sont pas nuls et leur produit intérieur ne peut être nul que s'ils sont perpendiculaires, ce qui exige que $\vec{a}$ soit perpendiculaire à la normale au plan de $\vec{b}$, $\vec{c}$, c'est-à-dire encore soit dans ce plan; cette condition est évidemment suffisante.

fondamentales (longueur, temps, masse ; ou longueur, temps, force) et l'on essaie de ramener à celles-là la définition des diverses autres. De même, pour des raisons de commodité numérique, les diverses unités en usage pour ces grandeurs fondamentales ont généralement pour rapport des puissances de 10 (mètre, centimètre, micron, kilomètre ; gramme, kilogramme, tonne) ; il y a cependant exception pour les temps (seconde, minute, heure).

37. **Formules de dimensions.** — Les formules de définition des grandeurs dérivées vérifient toujours la propriété suivante :

Lorsqu'on change les unités des grandeurs fondamentales, les mesures (grandeurs scalaires) ou les modules (grandeurs vectorielles) de ces grandeurs A, B, C *sont multipliés respectivement par des nombres a, b, c. La mesure ou le module de la grandeur dérivée* G *est multiplié par un nombre g qui ne dépend que des multiplicateurs a, b, c ; c'est un monome en a, b, c ayant pour coefficient* 1

α, β, γ *étant des puissances fixes égales à des nombres fractionnaires simples* [1].

Les multiplicateurs a, b, c et g peuvent encore être considérés comme les rapports des anciennes unités aux nouvelles. (Si la mesure d'une grandeur devient 10, 100 fois plus grande, c'est que l'unité ancienne était 10, 100 fois plus grande que la nouvelle.)

L'égalité qui donne g, en fonction de a, b, c, est appelée la *formule de dimensions*, ou le *symbole de dimensions*, ou *l'équation de dimensions* de la grandeur scalaire ou vectorielle G. On dit aussi que G est de dimensions α, β, γ par rapport aux grandeurs A, B, C [2].

---

[1] On peut démontrer que g est bien de la forme indiquée, si l'on admet *a priori* qu'il ne dépend que des multiplicateurs a, b, c et non des mesures des grandeurs A, B, C. (On trouvera cette démonstration dans Haag, *loc. cit.*, note du n° 112.) Le fait que α, β, γ sont simples résulte évidemment de l'examen des divers cas usuels.

[2] Dans la pratique courante on rappelle cette formule de dimensions dans l'énoncé des unités : mètre carré, centimètre cube, kilogrammètre, cm : sec, cm : sec², etc.

polaires, $\vec{x}$ est nécessairement axial. Or il est donné par la formule

$$\frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{(\vec{a})^2}$$

Dans le premier terme du second membre, le vecteur numérateur est axial, le scalaire dénominateur est polaire, le quotient est donc axial. Dans le second terme, le vecteur $\vec{a}$ est polaire, le scalaire λ est donc axial. C'est d'ailleurs ce qui résulte de son interprétation géométrique, également donnée au n° 35,

$$\lambda =$$

le scalaire numérateur, produit d'un vecteur axial par un vecteur polaire, est axial; le scalaire dénominateur est polaire : le quotient est axial.

vent intérêt à connaître, au lieu, ou en plus, de « son équation » ou de « ses équations », des expressions, soit du vecteur $\overrightarrow{OM}$, soit de ses projections (coordonnées de M) en fonction d'un paramètre, fixant la position de M sur la courbe. De même, pour étudier une surface, lieu d'un point M dans l'espace, il y a souvent intérêt à avoir des expressions de $\overrightarrow{OM}$ ou de ses projections en fonction de *deux* paramètres.

C'est à ce point de vue que nous nous placerons dans le Chapitre suivant. Nous nous contenterons de traiter ici le problème pour une droite lieu d'un point M : dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (et par suite ses projections) peut s'exprimer en fonction *linéaire* ou en fonction homographique d'un paramètre, et réciproquement.

77. **Fonction linéaire.** — Soit une droite (D), définie comme aux nos 68 ou 74, passant par un point A, et parallèle à un vecteur $\vec{a}$ (voir *fig.* 39) : c'est le lieu de M tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{a} \qquad (\lambda \text{ scalaire}),$$

soit encore

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda.\vec{a}.$$

$\overrightarrow{OM}$ est bien une fonction linéaire du paramètre λ, ce paramètre est en outre le rapport (affecté de signe) du vecteur $\overrightarrow{AM}$ au vecteur $\vec{a}$:

On passe immédiatement de cette expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ à celle des coordonnées du point M. Par exemple avec les notations adoptées, et dans l'espace,

$$+ \lambda.p$$

Réciproquement, si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est « fonction linéaire d'un paramètre scalaire »

$$\overrightarrow{OM} = \vec{b} + \lambda.\vec{a},$$

En particulier, soit un vecteur variable $\vec{a}$, fonction de t et un axe fixe $\mathrm{I}u$ de vecteur unitaire $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{a}$ et sa projection $\alpha(t) = \vec{u}.\vec{a}(t)$ sont des fonctions simultanées de t. Il résulte de ce qui précède que, si le vecteur $\vec{a}$ a une limite $\vec{a}_0$ lorsque t tend vers t_0, il en est de même de sa projection $\alpha(t)$ et la limite de cette projection est la projection de la limite $\vec{u}.\vec{a}_0$. *Si le vecteur est une fonction continue* $\left[\vec{a}_0 = \vec{a}(t_0)\right]$ *il en est de même de sa projection* $[\alpha_0 = \alpha(t_0)]$. Ces propriétés s'appliquent en particulier aux projections X, Y, Z de $\vec{a}$, sur trois axes de coordonnées

La relation

montre que, réciproquement, l'existence de limites pour les fonctions X, Y, Z ou leur continuité pour $t = t_0$ entraîne l'existence d'une limite ou de la continuité de $\vec{a}(t)$.

81. **Hodographe ou indicatrice.** — Le point d'application du vecteur ne figure pas dans les éléments de définition d'une fonction vectorielle, on est donc libre de choisir pour ce point d'application un point fixe O de l'espace. A chaque valeur de t correspond ainsi un vecteur $\vec{a}(t)$ et un point M tel que

Lorsque t varie, le lieu de ce point M *est en général une certaine courbe* (C), *qu'on appelle « hodographe » ou « indicatrice » de la fonction vectorielle ou du « vecteur variable ».*

L'existence « graphique » d'une telle courbe suppose naturellement la fonction vectorielle continue, sauf, peut-être, en des valeurs isolées de la variable.

La courbe ne suffit pas à elle seule à caractériser la fonction, il faut en outre préciser la correspondance de ses points et des valeurs

Ceci posé, le rapport envisagé a pour valeur

$$\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{t-t_0},$$

c'est donc un vecteur porté par la *corde* AM et dont le rapport au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est $\frac{1}{t-t_0}$. Prenons sur AM le vecteur unitaire $\vec{w}$, dirigé dans le sens des arcs croissants sur l'hodographe [de A vers M ou en sens inverse, suivant que $s(t)$ est supérieur ou inférieur à $s(t_0)$]. Le rapport s'écrit :

$$\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}=\vec{w}.\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{t-t_0}=\vec{w}.\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{s(t)-s(t_0)}.\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0},$$

$\overline{\mathrm{AM}}$ désigne naturellement la mesure du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sur l'axe de vecteur unitaire $\vec{w}$. Mais alors, le numérateur et le dénominateur de l'avant-dernier rapport sont de même signe, et comme l'un est la corde et l'autre l'arc, nous admettrons que sa limite est 1 lorsque M tend vers A, c'est-à-dire encore lorsque t tend vers t_0. Par ailleurs la limite de $\vec{w}$ est le vecteur $\vec{u}$, de longueur 1, tangent à la courbe et dirigé dans le sens des arcs croissants; la limite du rapport scalaire $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$, si elle existe, est la dérivée de s par rapport à t, prise pour la valeur t_0. Donc, en appliquant le théorème sur la limite du produit d'un scalaire par un vecteur (n° 80), la dérivée de la fonction vectorielle s'écrit :

$$d\vec{a} \qquad \vec{\ } \; ds$$

la dérivée est portée par la tangente à l'hodographe et, sur cette tangente orientée dans le sens des arcs croissants, elle a pour mesure $\frac{ds}{dt}$ [1].

---

[1] Cette démonstration prouve même que la dérivée existe et qu'elle est donnée par la règle indiquée, lorsque :

1° l'hodographe a une tangente;

2° l'arc s de l'hodographe peut être défini de façon que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde soit 1;

3° l'arc, considéré comme fonction de la variable t, a une dérivée par rapport à cette variable.

duisant l'inverse du rayon vecteur $\left(\frac{1}{\rho}\right)$; on a

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = -\frac{\rho'}{\rho^2}, \qquad \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{2\cdot\rho'^2}{\rho^3} - \frac{\rho''}{\rho^2},$$

d'où, en portant dans l'expression de R après avoir divisé haut et bas par ρ^4 :

$$R = \rho^3 \cdot \frac{\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\right)'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]}.$$

Signe de $\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]$. — Ce signe est le même que celui de $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$, par suite le même que celui de la mesure, par rapport au vecteur $\vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{k}$, du produit extérieur

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{d\theta} \wedge \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{d\theta^2}.$$

En appliquant ce qui a été dit au numéro précédent au sujet de ce signe, on en conclut :

$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]$ *est positif ou négatif, suivant que la tangente à la courbe, dans le sens des angles* θ *croissants, et la normale dirigée dans le sens de la courbure forment un angle droit, positif ou négatif* (par rapport à l'angle des axes).

104. Point simple à courbure non nulle. — Nous allons revenir, dans ce numéro et les suivants, sur l'étude des points particuliers des courbes et examiner notamment les points où le sens de la courbure ou même le sens des arcs ne peut plus être défini par les formules précédentes.

Considérons une branche de courbe (C) définie paramétriquement au voisinage d'un de ses points A par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(t).$$

Nous supposerons « *qu'au voisinage* » *de la valeur* t_0 *correspon-*

P est toujours sur la tangente en A, de part et d'autre de A suivant le signe de t. Quant à $\overrightarrow{PM}$, *si p est pair*, il est de même sens que $\overrightarrow{a_0^{(p)}}$, *la courbe ne traverse pas sa tangente;* l'aspect est le même que pour un point simple à courbure non nulle (*fig.* 45); le sens de la concavité (celui de la courbure n'est plus défini) est le sens $\overrightarrow{a_0^{(p)}}$. Si *p est impair*, le sens de $\overrightarrow{PM}$ change avec le signe de t, l'aspect de la courbe est celui de la figure 46; le sens de la concavité n'est plus défini; il y a une *inflexion graphique*.

106. Point de rebroussement. — En nous plaçant toujours dans l'hypothèse du développement possible de $(\overrightarrow{OM})$ suivant les puissances de t, on dit *qu'un point est « singulier » s'il n'est pas simple*, c'est-à-dire *si la première dérivée $\overrightarrow{a_0'}$ est nulle* (¹).

Comme pour le cas du point d'inflexion, nous allons étudier d'abord, avec quelques détails, le cas le plus simple : $\overrightarrow{a_0''}$ et $\overrightarrow{a_0'''}$ non nuls et non parallèles; on dit alors qu'on a un *point de rebroussement ordinaire*. En se bornant au terme en t^3 le développement de $\overrightarrow{AM}$ peut s'écrire

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{a_0} = \overrightarrow{a_0''}.\frac{t^2}{2} + \overrightarrow{a_0'''}.\frac{t^3}{6} + \overrightarrow{\varepsilon(t)}.t^3.$$

Le quotient $\overrightarrow{AM} : t^2$ a pour limite $\overrightarrow{a_0''}$, la droite AM a pour position limite une parallèle à ce vecteur, qui est par suite la tangente en A.

seraient constamment parallèles entre elles ou nulles, sans que la courbe soit cependant une droite. Ce serait par exemple le cas pour la branche de courbe, défini au voisinage de O par la fonction

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.t + \vec{j}.e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

(¹) Dans le cas d'une représentation impropre d'une courbe (C) un point ordinaire de (C) peut jouer le rôle de point singulier à cause de la représentation. Il en est ainsi par exemple si un point A étant atteint pour $t = 0$, le point M correspondant à t repasse par les mêmes points géométriques de la courbe, lorsque t varie de $-\varepsilon$ à 0 et de 0 à $+\varepsilon$. C'est le cas de la représentation impropre d'une demi-droite signalée au n° 81 :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \vec{a}.t^2.$$

Contact du second ordre. — La condition précédente étant supposée vérifiée, et λ_1 déterminé, pour qu'il y ait contact du second ordre il faut et il suffit que la seconde relation permette de déterminer le scalaire λ_2. En la multipliant extérieurement membre à membre par la première on obtient la conséquence

Il faut donc que les vecteurs $(a' \wedge a''_0)$ et $(b'_0 \wedge b''_0)$ (perpendiculaires au plan) aient pour rapport le cube du rapport de $\overrightarrow{a'_0}$ à $\overrightarrow{b'_0}$.

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car elle exprime que le vecteur $\overrightarrow{b'_0}$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{a''_0} - \lambda_1^2 . \overrightarrow{b''_0}$, ce qui permet de déterminer le scalaire λ_2 [1].

Il résulte de là que

$$| \rightarrow \quad \rightarrow | \qquad |b'_0 \wedge b''_0|$$

les deux courbes ont même rayon de courbure; en outre, en supposant par exemple λ_1 positif, les vecteurs $\overrightarrow{a'_0}$ et $\overrightarrow{b'_0}$ sont de même sens, les mesures des produits extérieurs sont de même signe; donc les sens de courbure sont aussi les mêmes (n° 101). Ces conditions sont évidemment suffisantes, de sorte que : *la condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes aient un contact du second ordre est qu'elles aient le même centre de courbure.*

On dit parfois que deux courbes qui ont un contact du second ordre sont *osculatrices*. Pour deux courbes osculatrices le développement du vecteur $\overrightarrow{MH}$ commence par un terme en t^3; ce vecteur change donc de sens lorsque M et H passent en A : *deux courbes osculatrices se traversent* [2].

Pour les *contacts d'ordre supérieur*, il faut envisager des expressions plus compliquées; par exemple pour le troisième ordre :

(ĉ

[1] On peut aussi établir cette condition en partant de l' « invariance » du produit extérieur des différentielles première et seconde signalée au n° 88.

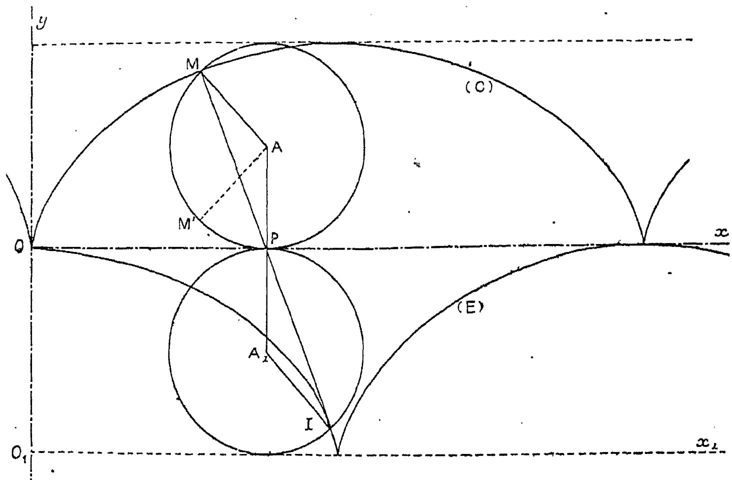
[2] Il en est de même chaque fois que le contact est d'ordre pair.

Prenons le rayon du cercle pour unité, désignons par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires sur les axes; soient A le centre du cercle mobile et t la longueur $\overline{OP}$ que l'on prendra comme paramètre. La courbe est définie par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.t + \vec{j} + \overrightarrow{AM}, \qquad (Ox, AM) = -t - \frac{\pi}{2}.$$

La dérivée du vecteur AM, de module 1, est le vecteur directement perpendiculaire $\overrightarrow{AM'}$, multiplié par la dérivée de l'angle (Ox, AM)

Fig. 54.



par rapport au paramètre t, soit -1 (n° 91). On en déduit les dérivées successives du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

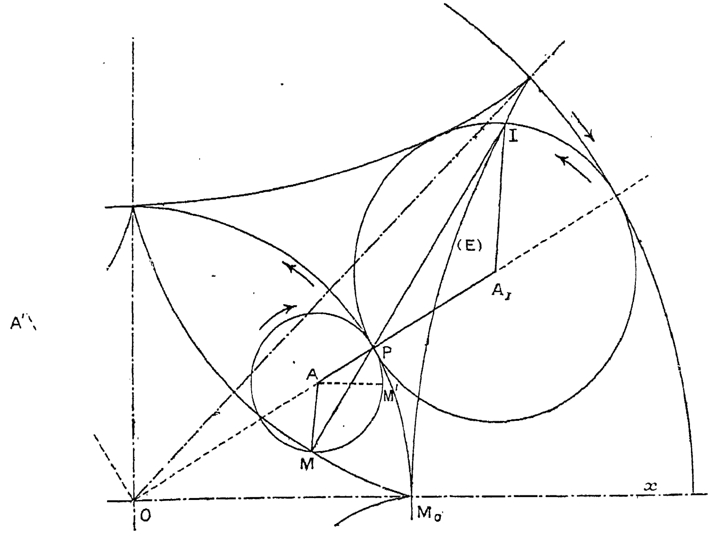
dt $\qquad dt^2$ $\qquad dt^3$

Les points de la cycloïde sont en général simples, puisque la dérivée première n'est pas en général un vecteur nul; il y a exception au point O et en tous les points de la courbe situés sur Ox, déduits de O par une translation. En effet, en O,

$$\overrightarrow{AM} = -\vec{j}, \qquad \overrightarrow{AM'} = \vec{i}.$$

complète de la circonférence roulante. Désignons par Ox l'axe qui joint O à l'un des points M_0 où M vient en contact avec la circonférence fixe; comme pour l'étude de la cycloïde, prenons pour unité le rayon r de la circonférence mobile; soient A son centre, P le point

Fig. 55.



de contact et prenons comme paramètre l'angle $t = (Ox, OP)$. La condition du roulement sans glissement s'écrivant $\widehat{PM} = \widehat{PM_0}$ entraîne

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}) = -4t, \qquad (Ox, \overrightarrow{AM}) = (Ox, OP) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}) = -3t.$$

Un point M de l'hypocycloïde est défini par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM};$$

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont des vecteurs de modules constants, égaux respectivement à 3 et 1, caractérisés par les angles variables

Soient donc $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{AM'}$ les vecteurs déduits de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AM}$ par une

le sens du vecteur $\frac{d\vec{u}}{ds}$ est le *sens de la courbure sur la normale principale* à la courbe au point considéré ;

le module de ce vecteur est la courbure en ce point, et l'inverse de cette courbure est le rayon de courbure R.

De sorte que si l'on désigne par $\vec{n}$ un vecteur porté par la normale principale, de module 1, et dirigé dans le sens de la courbure :

$$\frac{du}{ds} = \frac{d^2(OM)}{ds^2} \qquad 1 \;\vec{} \qquad (R \text{ positif}).$$

Le sens de la courbure ainsi défini est indépendant du sens choisi sur la courbe ; mais on ne peut plus, comme pour une courbe plane (n° 99), le comparer au sens de la concavité ; nous présenterons donc cette fois la démonstration sous forme de calcul. Changeons le sens des arcs, et soient s_1 et $\vec{u}_1$ les nouveaux éléments

$$_1 = -u;$$

donc

$$\frac{d(-\vec{u})}{-ds} \qquad du$$

D'autre part, le module de la dérivée de u est égal à la dérivée par rapport à s de l'arc de l'hodographe de $\vec{u}$. Mais cet hodographe est une courbe (U), tracée sur une sphère de rayon 1, qu'on nomme habituellement *l'indicatrice des tangentes ;* l'arc de (U) est une grandeur de dimension nulle (c'est-à-dire indépendante de l'unité de longueur). La courbure, quotient de cette grandeur par une longueur, est donc bien l'inverse d'une longueur et le rayon de courbure est une longueur.

Comme pour le plan (n° 107), on appelle encore *centre de courbure en* M, le point I obtenu en portant sur la normale principale la longueur R dans le sens de la courbure. Le point I est ainsi défini par

Les définitions du plan osculateur, du sens de la courbure et du rayon de courbure sont en défaut, si la dérivée par rapport à s du vecteur $\vec{u}$ est nulle. Le raisonnement du n° 99, valable pour l'espace, montre que, *si cette dérivée est nulle sur tout un arc de courbe, cet arc est une droite*. Nous reviendrons plus loin sur l'étude des points particuliers d'une courbe où cette dérivée est nulle.

124. **Torsion d'une courbe gauche.** — En supposant l'espace orienté, considérons le vecteur unitaire $\vec{b}$, directement perpendiculaire (n° 58) aux vecteurs rectangulaires $\vec{u}$ et $\vec{n}$:

$$\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{n}.$$

On l'appelle le « vecteur binormal » : c'est effectivement un vecteur unitaire porté par la binormale à la courbe.

La *dérivée par rapport à s du vecteur binormal est portée par la normale principale*. Effectivement, le vecteur $\vec{b}$ étant de module constant, sa dérivée lui est perpendiculaire (n° 90) ; d'autre part, en dérivant l'égalité $\vec{u}.\vec{b} = 0$, qui exprime la perpendicularité de $\vec{b}$ et $\vec{u}$, on obtient :

La dérivée étant perpendiculaire à $\vec{u}$ (tangente) et à $\vec{b}$ (binormale) est parallèle à la normale principale. Par définition :

La mesure du vecteur $\frac{d\vec{b}}{ds}$, *sur la normale principale, orientée dans le sens de la courbure, est appelée la « torsion » ; l'inverse de cette torsion est le rayon de torsion* T ; ce qui se traduit par l'égalité

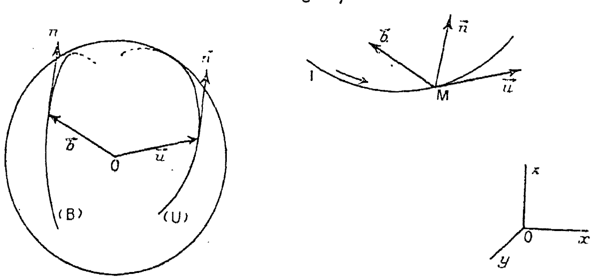
$$d\vec{b} \qquad \vec{\ } \quad 1$$

Signe de T. — Le signe de torsion est + ou — suivant que la dérivée de $\vec{b}$ est dirigée ou non dans le sens de la courbure. Ce signe

est indépendant du sens des arcs : si l'on change ce sens, ds et $\vec{u}$ prennent des valeurs opposées, $\vec{n}$ ne change pas, $\vec{b}$ et $d\vec{b}$ prennent des valeurs opposées et $\frac{d\vec{b}}{ds}$ reste invariable. Mais le signe de T dépend de l'axialité (ou orientation) de l'espace : si l'on change cette orientation ds, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne changent pas, $\vec{b}$ et $d\vec{b}$ prennent des valeurs opposées, et par suite aussi T, *qui est donc un scalaire axial* (n° 39).

Le module de la torsion est encore égal à la dérivée par rapport à s de l'arc d'hodographe de $\vec{b}$. Cet hodographe est une courbe (B), que l'on nomme habituellement l'*indicatrice des binormales*, tracée, comme celui de $\vec{u}$, sur une sphère de rayon 1. Il en résulte que le rayon de torsion a bien les dimensions d'une longueur.

Fig. 57.



Des valeurs des dérivées de $\vec{u}$ et $\vec{b}$ résulte la propriété géométrique des deux indicatrices :

Les tangentes aux deux indicatrices, (U) *et* (B), *des tangentes et des binormales, en des points correspondants, sont parallèles et ont pour direction commune celle de la normale principale à la courbe.*

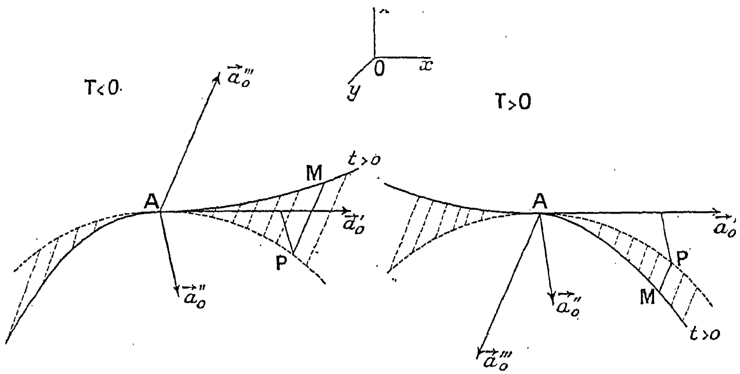
La définition du rayon de torsion est en défaut si la dérivée du vecteur $\vec{b}$ est nulle. Si cette dérivée est nulle sur tout un arc de courbe, *c'est-à-dire encore si la torsion est nulle, cet arc de*

$\overrightarrow{AM}$ sous la forme

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} \begin{cases} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{a'_0}.t + \overrightarrow{a''_0}.\frac{t^2}{2}, \\ \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{a'''_0}.\frac{t^3}{6} \end{cases}$$

le lieu de P est une parabole (n° 117), située dans le plan osculateur, tangente en A au vecteur $\overrightarrow{a'_0}$ et tournant sa concavité dans le sens du vecteur $\overrightarrow{a''_0}$ ou $\overrightarrow{n_0}$. Le vecteur $\overrightarrow{PM}$, qu'il faut ajouter en chaque point,

Fig. 58.



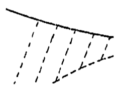
est (pour t suffisamment petit) de même sens que $\overrightarrow{a'''_0}$ pour t positif, de sens contraire à $\overrightarrow{a'''_0}$ pour t négatif. La courbe traverse donc son plan osculateur et se trouve d'un même côté du plan passant par la tangente, défini par les vecteurs $\left(\overrightarrow{a'_0}, \overrightarrow{a''_0}\right)$. Si le produit mixte

$$\overrightarrow{a'_0}.\left[\overrightarrow{a''_0} \wedge \overrightarrow{a'''_0}\right]$$

est positif, la *torsion est négative*, le trièdre des trois vecteurs $\overrightarrow{a'_0}$, $\overrightarrow{a''_0}$, $\overrightarrow{a'''_0}$ est direct, c'est-à-dire encore que $\overrightarrow{a'''_0}$ est dirigé vers la même région de l'espace que le vecteur binormal $\overrightarrow{b}$ par rapport au plan osculateur (schéma de gauche de la figure 58), *la courbe traverse son plan osculateur en passant du dessous* (région opposée à $\overrightarrow{b}$) *au-*

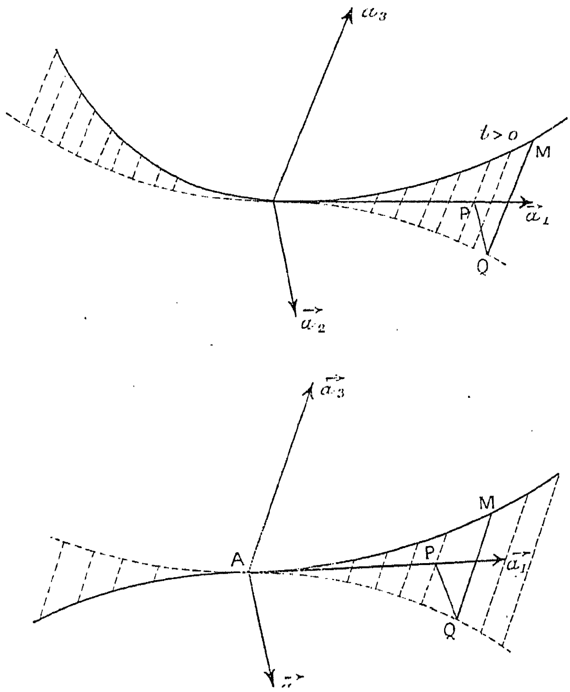
$h=1$, $k=2$, $r=4$, s'appelle un point à torsion nulle ou encore *à plan osculateur stationnaire*.

Fig. 60.



Si h est impair et k impair, le lieu de Q traverse sa tangente et a

Fig. 61.

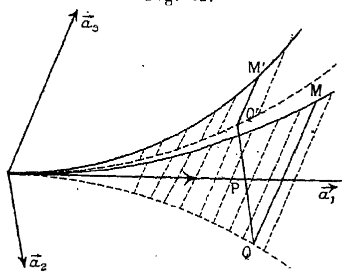


l'aspect d'un point d'inflexion. Suivant la parité de r on a l'une ou

l'autre des formes de la figure 61. Le cas le plus simple $h = 1$, $k = 3$, $r = 4$ est le *point d'inflexion ordinaire*.

Si h est pair, le lieu de Q a l'aspect d'un point de rebroussement de première ou deuxième espèce *suivant que k est impair ou pair*. Chacun de ces deux cas se subdivise en deux suivant que *r étant pair ou impair* la courbe reste d'un même côté ou traverse son plan osculateur. On a représenté (*fig.* 62) le cas de h pair, k impair et

Fig. 62.



r pair. Le cas le plus simple correspondant à $h = 2$, $k = 3$, $r = 4$ est *le point de rebroussement ordinaire*.

Les vecteurs dérivés partiels par rapport à u, v se représentent par les notations (analogues à celles des fonctions scalaires) :

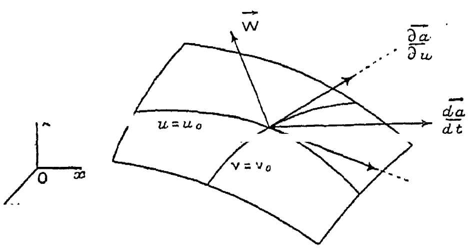
$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial v}.$$

Les deux dérivées partielles peuvent être considérées comme les dérivées du vecteur $\vec{a}$ « sur les chemins » $v = v_0$ et $u = u_0$, dérivées prises respectivement sur ces chemins par rapport aux variables u et v. L'existence des dérivées partielles entraîne par suite la continuité de la fonction sur ces chemins.

Considérons la surface hodographe, le point A correspondant aux valeurs u_0, v_0 et les hodographes des chemins $v = v_0$, $u = u_0$; *les dérivées partielles sont des vecteurs tangents à ces hodographes*, d'après la propriété de la ligne d'action d'une dérivée (n° 82).

Remarquons encore que les règles de calcul des dérivées (somme et produits) indiquées au n° 86 sont valables pour les dérivées partielles.

Fig. 63.



Notamment *les projections des dérivées partielles sur un axe quelconque sont les dérivées partielles des projections;* il en est ainsi, en particulier, pour les axes de coordonnées, ce qui donne

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial u} = \vec{i}.\frac{\partial x}{\partial u} + \vec{j}.\frac{\partial y}{\partial u} + \vec{k}.\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial v} = \vec{i}.\frac{\partial x}{\partial v} + \vec{j}.\frac{\partial y}{\partial v} + \vec{k}.\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Nous n'étudierons que des fonctions de deux variables ayant des dérivées partielles pour tous les points d'un certain domaine. Dans ces conditions les vecteurs dérivés deviennent à leur tour dans ce

La normale en un point de la surface est parallèle au vecteur

$$\vec{a}'(u) \wedge \vec{k}.$$

En chaque point d'une génératrice ($u =$ const.) ce vecteur reste constant : la normale demeure parallèle à une direction fixe, d'ailleurs perpendiculaire à la génératrice. Donc le plan tangent est le même en tout point d'une génératrice et contient cette génératrice; il est notamment défini par cette génératrice et la tangente à la directrice.

Il y a exception si $\vec{a}'_u$ est nul ou parallèle à $\vec{k}$, ce qui se produit pour une génératrice issue d'un point singulier N_0 de la directrice ou tangente à cette directrice en N_0; cette génératrice est une ligne de points singuliers (points de rebroussement au sens du numéro précédent). Pour une courbe (C), tracée sur le cylindre et passant en un point A de cette génératrice, la différentielle

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{a}'_{u_0}\,du + \vec{k}\,dv$$

est parallèle à $\vec{k}$ ou nulle. Dans le premier cas la courbe (C) est tangente à la génératrice; dans le deuxième cas elle admet A comme point singulier; sa tangente, qui peut encore être parallèle à $\vec{k}$, est, en tout cas, située dans le plan défini par $\vec{k}$ et la première dérivée $\overrightarrow{a^{(p)}_{u^p}}(u_0)$ qui n'est plus parallèle à $\vec{k}$. Ce plan est indépendant de la position du point A sur la génératrice : on peut encore l'appeler le *plan tangent* au cylindre suivant cette génératrice.

147. Surface conique. — On appelle surface conique une surface engendrée par une droite (*génératrice*) qui se déplace en passant par un point fixe O appelé *sommet*, en s'appuyant sur une courbe fixe (*directrice*). On peut encore prendre pour directrice une courbe quelconque tracée sur la surface conique et notamment une section plane ne passant pas par O.

Définissons la directrice comme hodographe du vecteur $\vec{a}(u)$; la surface conique est l'hodographe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, fonction de u, v, tel que

$$\overrightarrow{OM} = v\vec{a}(u).$$

Les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à u, v sont

La normale en un point de la surface est parallèle au vecteur

$$v.\vec{a}'(u) \wedge \vec{a}(u) \quad \text{ou seulement} \quad \vec{a}'(u) \wedge \vec{a}(u).$$

Ce deuxième vecteur est encore constant en tout point d'une génératrice, et est perpendiculaire à cette génératrice $\left(\text{vecteur } \vec{a}\right)$. Le plan tangent est le même en tout point de la génératrice; il est notamment défini par cette génératrice et la tangente à la directrice. Il y a exception si $\vec{a}'(u)$ est nul ou parallèle à $\vec{a}(u)$, c'est-à-dire pour une génératrice du cône passant par un point singulier de la directrice, ou tangente à cette directrice. C'est la même circonstance que pour le cylindre ([1]).

Il y a encore exception pour le sommet O du cône. Ce point correspond à tous les couples de valeurs des paramètres (u, o); c'est le type du point conique au sens du n° **145**.

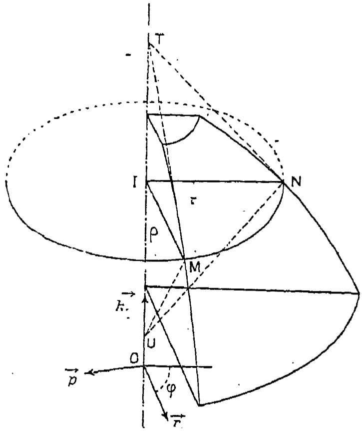
148. Surface de révolution. — On appelle surface de révolution une surface engendrée par la rotation d'une courbe nommée *directrice*, autour d'une droite Oz, l'*axe de révolution*. On peut encore prendre comme directrice une courbe quelconque tracée sur la surface, en particulier sa section par un plan passant par l'axe, appelé *plan méridien;* cette section se nomme une *méridienne* de la surface de révolution. La section de la surface par un plan perpendiculaire à l'axe se compose d'une ou plusieurs circonférences concentriques qu'on nomme *parallèles* de la surface. Tout parallèle est ainsi engendré par la rotation d'un point d'une méridienne autour de Oz.

Définissons l'axe de révolution par le point O et le vecteur unitaire $\vec{k}$; soient N un point d'une courbe méridienne, I sa projection

([1]) De cette proposition relative au cône et au cylindre on déduit cette conséquence : faisons la perspective, centrale ou cavalière (projection parallèle), d'une courbe (C), avec un point de vue situé (à distance finie ou à l'infini) sur une tangente en un point N_0 de (C); la perspective n_0 du point N_0 est un point singulier de la perspective (c) de la courbe (C).

sur l'axe, z la mesure de $\overrightarrow{OI}$ et ρ la distance positive IN; quand N décrit la courbe méridienne, z et ρ sont fonctions d'un même paramètre, par exemple l'arc σ de cette courbe. Quand I décrit l'axe, la circonférence de centre I, de rayon ρ, située dans un plan normal à

Fig. 65.



l'axe, engendre la surface de révolution; on a

$$\overrightarrow{IM} = \vec{r}\rho,$$

$\vec{r}$ désignant un vecteur unitaire normal à $\vec{k}$; posons

La surface est l'hodographe de la fonction vectorielle de σ et φ :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \vec{k}z \qquad \vec{\ } \qquad)\rho(\sigma).$$

Les courbes $\varphi =$ const. sont les diverses méridiennes, déduites par une rotation d'angle φ autour de Oz de la méridienne considérée; les courbes $\sigma =$ const. sont des parallèles ([1]).

([1]) On obtient la même formule pour $\overrightarrow{OM}$ en partant d'une courbe génératrice quelconque. Toutefois, pour que les courbes $\varphi =$ const. soient encore les courbes déduites par rotation d'angle φ de cette génératrice, il faut supposer le vecteur $\vec{r}$, fonction à la fois de φ et σ.

points de la génératrice correspondante sont singuliers; nous en avons signalé un exemple dans le cas du cône et du cylindre (génératrice tangente à la directrice). En étudiant les plans tangents aux différents points, on obtient les mêmes résultats que pour une génératrice ordinaire : un paramètre de distribution ou un plan tangent unique.

150. Autres exemples de surfaces. — Indiquons, sans nouvelles explications, quelques types de surfaces et leur représentation comme hodographes d'une fonction vectorielle :

Une *surface hélicoïde* est engendrée par une courbe (C) qui tourne autour d'un axe Oz en se translatant parallèlement à cet axe, l'angle de rotation étant proportionnel au déplacement de translation. C'est l'hodographe du vecteur

Les notations sont les mêmes que pour la surface de révolution (n° 148) : z, ρ sont fonctions simultanées d'un paramètre sur la courbe (C); le second paramètre est φ qui figure explicitement dans la première parenthèse et dont dépend $\vec{r}$.

On dit encore que le déplacement de (C) est un mouvement « hélicoïdal » de pas h. Les courbes z et ρ constants sont des hélices de pas h. Pour $h = 0$ on retrouve la surface de révolution.

Une *surface de translation* est engendrée par une courbe se déplaçant d'un mouvement de translation. C'est l'hodographe du vecteur variable, fonction de u, v :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}(u) + \vec{b}(v).$$

Elle est engendrée tant par la translation d'une courbe $u =$ const. que par la translation d'une courbe $v =$ const. Ces surfaces comprennent comme cas particuliers les surfaces cylindriques.

Une *surface conoïde* est engendrée par une droite qui se déplace en s'appuyant sur une droite fixe D, en restant parallèle à un plan fixe P et en vérifiant une troisième condition (par exemple : rencontrer une courbe donnée). Dans l'expression des surfaces réglées, il suffit de supposer $\vec{b}(u)$ porté par la droite D, par exemple de la

membre se réduit à l'inverse de $\overline{AP_0}$ (nº 157), mesuré sur la normale de direction $\vec{N}$. Pour la section méridienne elle-même comme $d\varphi = 0$, on obtient $\overline{AP_0} = R_0$, ce qui n'est qu'une vérification.

Pour la section normale perpendiculaire à la section méridienne, on a $d\sigma = 0$: l'égalité se réduit à

$$-\rho = \overline{AP_0}\,(\vec{n}.\vec{N}) = \vec{r}.AP_0,$$

en remarquant que $\overline{AP_0}.\vec{N} = \overrightarrow{AP_0}$. Soit I la projection de A sur l'axe de révolution (voir *fig.* 68); l'égalité pouvant s'écrire

montre que la projection de P_0 sur le rayon IA se fait en I. Or I est le centre de courbure du parallèle tangent à cette section normale; donc :

Le centre de courbure P_0 *de cette section est le point* U *de l'axe commun à toutes les normales à la surface le long du parallèle de* A (nº 148).

Examinons notamment le cas d'une sphère de rayon a, avec les notations actuelles et celles de la fin du nº 148 (θ colatitude, φ longitude), on a

$$\sigma = a.\theta, \qquad R_0 = a, \qquad \vec{N} = -(\vec{k}.\cos\theta + \vec{r}.\sin\theta) = -\overrightarrow{OM}$$

d'où

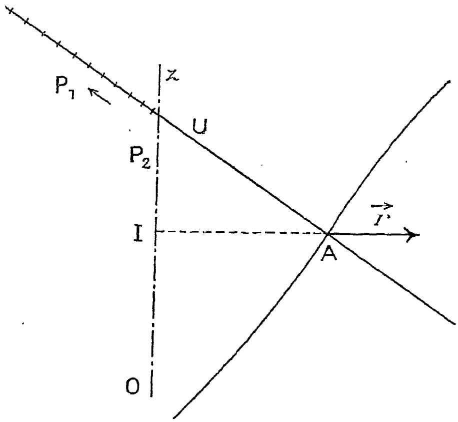
$$\frac{\vec{N}.\vec{n}}{R} = \frac{a(d\theta^2)}{a^2(d\theta^2)}$$

En particulier, toute courbe dont la normale principale est portée par la normale à la sphère a son centre de courbure au centre de la sphère : $(\vec{N}.\vec{n}) = 1$, $R = a$. C'est là un fait évident pour les sections planes normales qui sont des grands cercles. Le théorème de Meusnier est également évident, si on ne l'applique qu'aux sections *planes* qui sont des petits cercles de la sphère.

160. **Variation des courbures normales.** — Les formules indiquées permettent d'étudier la forme d'une surface au voisinage d'un point ordinaire A et la variation du centre de courbure de la section normale passant par A. Rappelons la formule qui donne la position de

Dans le cas de $\vec{r}.\vec{N} = 0$, c'est-à-dire si la tangente à la méridienne est perpendiculaire à l'axe de révolution, la section de la surface par le plan perpendiculaire au plan méridien admet un point d'inflexion. Si la méridienne a un centre de courbure P_1 à distance finie, la surface est manifestement d'un même côté de son plan tangent et ne le coupe pas.

Dans le cas où la courbure est nulle, la méridienne admet A pour point d'inflexion; en supposant la tangente non perpendiculaire à



l'axe, le centre de courbure P_2 ou U de la section perpendiculaire au plan méridien reste à distance finie. Si l'inflexion est graphique (n° 105) la surface traverse évidemment son plan tangent; les courbes sont en général du côté de l'axe de révolution, il n'y a exception que pour les courbes tangentes à At pour lesquelles A est d'ailleurs un point d'inflexion [1], d'après le théorème de Meusnier.

Nous laissons de côté le cas où ρ s'annule qui correspond à un point conique de la surface.

[1] Dans ce cas la section de la surface par son plan tangent a évidemment la forme d'un rebroussement de première espèce. On peut encore envisager le cas d'un point d'inflexion non graphique dont la concavité soit à l'opposé de l'axe. La section par le plan tangent a la forme de deux branches de courbe tangentes.

plan de sorte que la condition

$$\overrightarrow{a'_u} \wedge \overrightarrow{a'_v} = 0$$

n'entraîne plus qu'*une seule* condition scalaire, et il existe en général une courbe (E) définie par cette relation, qui est l'enveloppe et le lieu des points singuliers des courbes des diverses familles déduites de la fonction précédente.

L'existence de (E) suppose toutefois que la représentation du plan par la fonction $\vec{a}(u, v)$ est impropre, au moins dans certaines régions. Sinon, à tout point du plan M de coordonnées rectangulaires x, y, correspondrait un seul système de valeurs de u, v; la réciproque étant évidente. Par suite le parallélisme des dérivées partielles par rapport à u, v entraînerait le parallélisme des dérivées de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par rapport à x, y, ce qui est absurde puisque ces dérivées ne sont autres que les vecteurs unitaires des axes $\vec{i}$, $\vec{j}$ qui sont perpendiculaires.

On appelle point caractéristique sur la courbe C_{v_0} *d'une famille* C_v *la limite d'un point d'intersection de* C_{v_0} *avec une courbe voisine de la famille. Les points caractéristiques sont tous sur la courbe* (E).

Effectivement considérons une courbe C_{v_0} et une courbe voisine C_v; supposons-leur au moins un point N commun qui corresponde respectivement aux valeurs u' et u du paramètre sur chacune d'elles. Ces valeurs u', u ont une limite commune u_0, paramètre du point caractéristique N_0 sur C_{v_0}. De la définition de N résulte

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \vec{a}(u', v_0) = \vec{a}(u, v).$$

Mais $\vec{a}(u', v_0)$ et $\vec{a}(u, v)$ sont séparément des fonctions de v, la première par l'intermédiaire de u', la seconde par l'intermédiaire de u et v; développons-les par la formule de Taylor par rapport à $(v - v_0)$ jusqu'aux termes du premier ordre,

$$\vec{a}(u, v) = \vec{a}(\qquad + (v - v_0)\left[\overrightarrow{a'_{u_0}}\left(\frac{du}{dv}\right)_0 + \overrightarrow{a'_{v_0}}\right] + (v - $$

$$\vec{a}(u', v_0) = \vec{a}(\qquad + (v - v_0)\,\overrightarrow{a'_{u_0}}\left(\frac{du'}{dv}\right)_0 + (v - v_0)\,\vec{\varepsilon}'.$$

[Pour abréger, on a écrit $\overrightarrow{a'_{u_0}}$ et $\overrightarrow{a'_{v_0}}$ au lieu de $\overrightarrow{a'_u}(u_0, v_0)$ et $\overrightarrow{a'_v}($ $).$]

Une surface développable est applicable sur un plan et, dans cette application, l'arête de rebroussement devient une courbe plane de même rayon de courbure.

168. Développantes d'une courbe gauche. — Considérons la correspondance ainsi définie d'une courbe gauche (E) et la surface développable formée par ses tangentes avec une courbe plane (E′) et son plan. Dans cette correspondance (qui conserve les angles) les développantes de (E′) restent des trajectoires orthogonales des tangentes à (E) et réciproquement. Donc :

Si l'on porte sur la tangente en E *à une courbe gauche* (E) *une longueur*

$$\overline{\text{EM}} = \text{arc}\ \widehat{\text{E}_0}$$

dans le sens opposé aux arcs, la courbe (C) *lieu de* M *est normale à la droite* EM. *La courbe* (C) *est encore appelée « développante de* (E) ».

On peut vérifier directement ce résultat en cherchant les trajectoires orthogonales des droites de la surface développable

$$\overrightarrow{\text{OM}} = \vec{c}(\sigma) + \mu\,\vec{c}'(\sigma);$$

l'équation du n° 162 se réduit à

$$d\mu + d\sigma = 0, \qquad \text{d'où} \qquad . = \sigma_0 - \sigma.$$

En remplaçant μ par cette valeur et dérivant $\overrightarrow{\text{OM}}$, on obtient

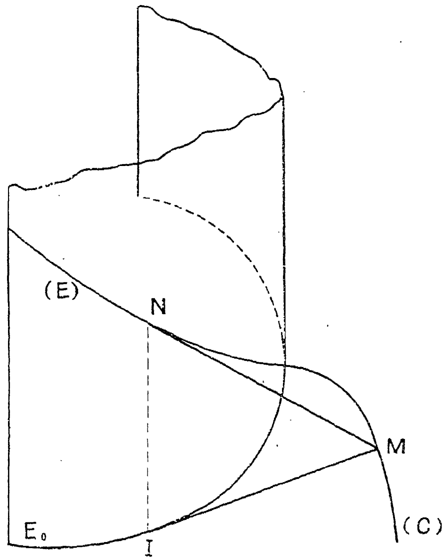
$$ds \qquad\qquad) = (\sigma_0 - \sigma)\cdot\frac{n}{\text{R}},$$

la tangente à la développante (C) est parallèle à la normale principale à (E); ceci résulte aussi du fait que le plan tangent à la surface développable est osculateur à (E).

169. Développées des courbes gauches. — Inversement, étant donnée une courbe (C) (plane ou gauche), cherchons si on peut la considérer comme une développante d'une certaine courbe (E). Il

donc « en enroulant une droite » sur le cylindre de base (E_0) : c'est

Fig. 77.



une *hélice de ce cylindre* (n° 129). Dans le cas où (E_0) est un cercle, (C) est une développante de cercle : les développées de (C) sont des hélices circulaires.

Le moment est un vecteur axial ou polaire suivant que le vecteur est lui-même polaire ou axial; ses dimensions sont celles du vecteur multipliées par une longueur.

Remarquons encore que le *moment est perpendiculaire au vecteur*. Enfin le *moment n'est un vecteur nul que dans les deux cas :*

1° Le *vecteur* $\vec{a}$ *est nul;*

2° $\overrightarrow{OA}$ est nul ou parallèle à $\vec{a}$, c'est-à-dire que *la droite* (D) *passe par* O.

173. **Propriétés du moment.** — La donnée du moment $\overrightarrow{OG}$, ajoutée à celle du vecteur $\vec{a}$, caractérise bien un *vecteur glissant*. Effectivement, on a les deux propriétés réciproques suivantes :

Si deux vecteurs équipollents sont portés par une même droite (D), *ils ont un même moment par rapport à un point* O.

Si l'on se donne un point O, *un vecteur* $\vec{a}$, *un vecteur* $\overrightarrow{OG}$ *perpendiculaire, il existe une et une seule droite* (D) *telle que tout vecteur, équipollent à* $\vec{a}$ *et porté par* (D), *ait pour moment* $\overrightarrow{OG}$ *par rapport au point* O. Dans le cas particulier où $\overrightarrow{OG}$ est nul, (D) passe par O.

Considérons des vecteurs équipollents à $\vec{a}$, d'origine A et A', portés par une même droite, qui est nécessairement AA'. Calculons le moment du premier, en remplaçant $\overrightarrow{OA}$ par

on obtient

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{a} = \overrightarrow{OA'} \wedge \vec{a} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{a} = \overrightarrow{OA'} \wedge \vec{a}$$

car $\overrightarrow{A'A}$ étant parallèle à $\vec{a}$, leur produit extérieur est nul.

La seconde propriété résulte de ce qui a été dit sur la division géométrique (n° 30). Étant donnés les vecteurs $\vec{a}$ et $\overrightarrow{OG}$ perpendiculaires, il existe une infinité de vecteurs $\vec{x}$ tels que

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \overrightarrow{OG}.$$

Le lieu des extrémités A des vecteurs d'origine O équipollents à $\vec{x}$ est une droite (D) parallèle à $\vec{a}$. Il s'ensuit bien que tout vecteur équipollent à $\vec{a}$, porté par la droite (D), a pour moment $\overrightarrow{OG}$ par rapport à O. Il convient toutefois que $\overrightarrow{OG}$ ait pour dimensions le produit par une longueur des dimensions de $\vec{a}$; sinon la position de la droite (D) dépendrait du choix des unités de grandeurs.

174. **Centre des moments.** — Le point O est appelé « centre des moments » et sa donnée est essentielle pour la définition du moment. Le moment d'un vecteur glissant est donc un *vecteur lié;* c'est pourquoi on représente habituellement un moment $\overrightarrow{OG}$ en lui donnant comme point d'application le centre O des moments.

On voit facilement comment varie le moment lorsqu'on change le centre des moments. Soit O′ un nouveau centre; on a la suite d'égalités immédiates :

$$\overrightarrow{O'A} \wedge \vec{a} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'}) \wedge \vec{a} = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{a}) - (\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{a}),$$

ce qu'on peut énoncer comme suit : *le moment par rapport à O′ est égal au moment par rapport à O diminué du moment par rapport à O du vecteur $\vec{a}$ supposé appliqué en O′.*

$$\mathrm{Mom}_0\, \vec{a} = \mathrm{Mom}_0\, \vec{a} - \mathrm{Mom}_0 \qquad \text{é par O}')\,.$$

175. **Coordonnées d'un vecteur glissant.** — Pour définir analytiquement un vecteur glissant, on se donne ordinairement, en plus du centre des moments O, trois axes rectangulaires directs, issus de O : Ox, y, z. Les projections sur ces axes du vecteur $\vec{a}$ et de son moment par rapport à O sont appelées *les coordonnées du vecteur glissant.* On les désigne souvent par

$$\mathrm{X, Y, Z} \quad \text{projections de } \vec{a}; \quad \mathrm{L, M, N} \quad \text{projections du } \mathrm{Mom}_0\, \vec{a}.$$

Ces six nombres ne sont pas indépendants : les deux vecteurs dont ils sont les projections étant rectangulaires, on a

$$\mathrm{L.X + M.Y + N.Z} = 0.$$

droites, par la relation

$$ap' + bq' + cr' + a'p + b'q + c'r = 0.$$

II. — SYSTÈMES DE VECTEURS GLISSANTS.

181. Définition et notations. — On appelle « système de vecteurs glissants » ou plus brièvement « système de vecteurs » un ensemble de grandeurs vectorielles glissantes de mêmes dimensions. Nous supposerons d'abord que ces vecteurs ont des modules finis et sont en nombre fini. Nous numéroterons les divers vecteurs et nous les représenterons, ainsi que leurs éléments constitutifs, par les mêmes lettres avec le numéro en indice. Ainsi le $i^{\text{ième}}$ vecteur sera le vecteur $\vec{a_i}$ ayant A_i pour point d'application; son moment par rapport O sera

ses coordonnées seront X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i, les trois premières étant les composantes de $\vec{a_i}$, les trois dernières celles de $\overrightarrow{OG_i}$.

182. Éléments de réduction et coordonnées d'un système. — On appelle :

1° *Résultante générale* d'un système de vecteurs, *un vecteur équipollent à la somme géométrique de tous les vecteurs du système*

$$\vec{\ } \qquad (\vec{a}$$

2° *Moment résultant par rapport à un point* O, *un vecteur équipollent à la somme géométrique des moments par rapport à* O *de tous les vecteurs du système*

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_0} = \Sigma\left(\overrightarrow{OG_i}\right) = \Sigma(\quad \ _i \wedge$$

Le signe Σ indique, bien entendu, qu'il faut faire la somme géométrique des divers vecteurs obtenus en faisant varier l'indice i.

Les vecteurs d'origine O respectivement équipollents à $\vec{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$,

sont appelés ordinairement *éléments de réduction du système de vecteurs par rapport au point* O.

Sur trois axes de coordonnées rectangulaires d'origine O, les deux vecteurs $\vec{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$ ont pour projections les sommes des projections des vecteurs $\vec{a_i}$ et $\overrightarrow{OG_i}$, soient :

$$\begin{aligned} X &= \Sigma(X_i), \\ Y &= \Sigma(Y_i), \\ Z &= \Sigma(Z_i), \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} L &= \Sigma(L_i), \\ M &= \Sigma \\ N &= \Sigma \end{aligned} \right.$$

Ces six nombres X, Y, Z, L, M, N, qui sont les sommes respectives des coordonnées des vecteurs du système, sont appelés aussi les *coordonnées du système de vecteurs.*

Dans le cas particulier où le système ne comprend qu'un seul vecteur $\vec{a}$ d'origine A, les éléments de réduction et les coordonnées du système se confondent respectivement avec le vecteur $\overrightarrow{OR}$ équipollent à $\vec{a}$ et le moment $\overrightarrow{OG}$ de ce vecteur d'une part, avec les coordonnées de ce vecteur d'autre part; $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont alors perpendiculaires. Nous verrons plus loin que, dans le cas général, il n'y a aucune relation entre $\vec{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$ et qu'on peut toujours constituer un système de vecteurs ayant pour éléments de réduction, par rapport à un point O, deux vecteurs $\vec{\mathcal{R}}$, $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}$ pris arbitrairement.

183. Champ des moments. — Quand on change le point O, qu'on appelle *le centre des moments*, la résultante générale reste équipollente à elle-même; on obtient *la variation du moment résultant* par une règle analogue à celle qui donne la variation du moment d'un vecteur (n° 174). On a en effet

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{O'A_i} \wedge \vec{a_i}) &= \Sigma\big[(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OO'}) \\ &\vec{\iota}_i \wedge \vec{a_i}) - \overrightarrow{OO'} \wedge \Sigma(\vec{a_i}) = \overrightarrow{\mathfrak{M}_0} - \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

ce qu'on peut énoncer :

Le moment résultant par rapport à O′ *est égal au moment*

Si l'on remarque que $(\overrightarrow{OB} \wedge \vec{u})$ est le moment $\vec{m}$ par rapport à O du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par l'axe Δ, le moment du système par rapport à Δ peut s'écrire

$$\rightarrow \;\longrightarrow \qquad \rightarrow \;\rightarrow$$

Sous cette forme, il est évident que le moment ne dépend que de Δ et non de la position du point B sur cet axe.

En particulier, les moments du système par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz sont les projections sur ces axes du moment résultant par rapport à l'origine, c'est-à-dire les trois dernières coordonnées du système.

186. Équivalence de deux systèmes. — On dit que *deux systèmes* de vecteurs sont *équivalents* s'ils ont *même résultante générale* et *même moment résultant* par rapport à un même point O.

Deux systèmes équivalents ont même moment résultant par rapport à tout point O′ de l'espace; ce moment s'exprime en effet uniquement en fonction de la résultante générale et du moment résultant par rapport à O. Inversement, si deux systèmes de vecteurs ont même moment résultant par rapport à *tout* point de l'espace [les champs (n° 143) de moments coïncident], ils sont équivalents [1]. Effectivement puisqu'ils ont même moment par rapport à O, il suffit d'établir l'égalité (ou équipollence) de leurs résultantes générales, soit $\vec{\mathcal{R}}$, $\vec{\mathcal{R}'}$. Or on doit avoir en tout point O′

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_0} - \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_0} - \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\mathcal{R}'}, \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\mathcal{R}'}.$$

Ceci ayant lieu, quel que soit le vecteur $\overrightarrow{OO'}$, entraîne $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}'}$.

On peut encore dire que deux systèmes équivalents ont mêmes coordonnées et réciproquement.

On représente en général un système de vecteurs par une seule lettre, mise entre parenthèses, par exemple (Σ). Pour écrire que deux systèmes (Σ), (Σ') sont équivalents, on emploie le signe ordinaire de

---

[1] D'après la remarque du n° 183 sur les champs de moments, il suffit que cette égalité des moments soit vérifiée pour trois points de l'espace, non en ligne droite.

résultant nuls

$\rightarrow$

Le moment résultant par rapport à tout point de l'espace est nul; de même les six coordonnées et réciproquement. Tous les systèmes nuls sont équivalents entre eux. On écrit encore qu'un système est nul, en égalant son symbole représentatif à o

189. Somme de deux systèmes. — On appelle somme de deux systèmes de vecteurs (Σ_1), (Σ_2) le système (Σ) formé par la réunion des vecteurs des deux systèmes, les grandeurs vectorielles de (Σ_1) et (Σ_2) étant supposées de mêmes dimensions. On exprime l'addition des systèmes par le symbole ordinaire de la somme

La résultante générale et le moment résultant de la somme sont les sommes géométriques des résultantes générales et moments résultants (par rapport à un même point O) des systèmes composants

$$\vec{\xi}_1 \qquad \vec{\ }$$

Cette propriété évidente montre bien que, si l'on remplace les systèmes composants (Σ_1), (Σ_2) par des systèmes équivalents, le système somme est lui-même remplacé par un système équivalent.

Le moment de la somme par rapport à un point quelconque de l'espace est la somme des moments des systèmes composants par rapport au même point. Enfin les coordonnées de la somme sont les sommes des coordonnées respectives des systèmes composants, par rapport aux mêmes axes :

$$L = L_1 + L_2, \qquad M = M_1 + M_2, \qquad N = N_1 + N_2.$$

L'addition des systèmes de vecteurs possède évidemment les propriétés de *commutativité* et d'*associativité* : dans une somme de plusieurs systèmes de vecteurs on peut remplacer plusieurs d'entre eux par leur somme et permuter d'une façon quelconque l'ordre des systèmes composants. De la conservation de l'équivalence, il

résulte aussi (comme pour l'addition des vecteurs, n° 8) que si l'on ajoute un même système à deux systèmes équivalents, on obtient encore deux systèmes équivalents. Enfin la somme d'un système et d'un système nul est équivalente au système primitif, et inversement le système nul est le seul qui, ajouté à un système, donne un système équivalent.

Il peut arriver que, dans le cas d'une somme de plusieurs systèmes, on ait évalué les moments résultants des systèmes à additionner par rapport à des points différents. Soient par exemple : (Σ_1) de résultante générale $\overrightarrow{\mathcal{R}_1}$, de moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ par rapport au point A_1 ; (Σ_2) de résultante générale $\overrightarrow{\mathcal{R}_2}$, de moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ par rapport au point A_2 ; .... Pour la somme (Σ) de ces systèmes, la résultante générale $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ et le moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}_0}$ par rapport à un point O seront donnés par les égalités

$$\wedge \mathcal{R} \qquad \cdot \mathcal{M}_2$$

190. **Systèmes opposés ou en équilibre.** — *On dit que deux systèmes sont opposés ou « en équilibre » lorsque leur somme est un système nul*

$$\text{ou} \quad \mathcal{R}_1 \qquad {}_2 = 0, \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_2} = 0.$$

Ces égalités montrent qu'il y a un et un seul système, défini à une équivalence près, opposé à un système donné. On obtient en particulier un tel système en remplaçant, dans le système donné, chaque vecteur par le vecteur directement opposé.

Partant de là, on peut naturellement définir la différence de deux systèmes de vecteurs (Σ'), (Σ) : c'est le système (Σ''), défini à une équivalence près tel que

on l'obtient en ajoutant à (Σ') l'opposé de (Σ); on le représente par

Le signe — précédant un système signifie donc indifféremment qu'il faut ajouter son opposé ou encore le retrancher du système qui le précède.

Les éléments de réduction par rapport à un point O, ou encore les coordonnées, de la différence (Σ''), s'obtiennent naturellement en formant les différences des éléments de réduction par rapport à O, ou des coordonnées, des systèmes (Σ') et (Σ).

191. **Produit par un scalaire.** — Le produit d'un système (Σ) par un scalaire λ est le système obtenu en multipliant tous les vecteurs de (Σ) (toujours définis à un glissement près) par le scalaire λ. Il est évident que cette opération a pour effet de multiplier par λ la résultante générale et le moment résultant

$$\vec{\mathcal{R}}' = \lambda.\vec{\mathcal{R}}, \qquad \vec{\mathcal{M}}' = \lambda.\vec{\mathcal{M}}.$$

Ceci montre encore que le produit, qu'on représente par $\lambda.(\Sigma)$, est remplacé par un système équivalent si l'on remplace (Σ) lui-même par un système équivalent. En particulier, l'opposé d'un système (Σ) peut être considéré comme son produit par — 1.

Comme pour le cas du produit d'un vecteur par un scalaire, on a les identités (n^{os} 7 et 12)

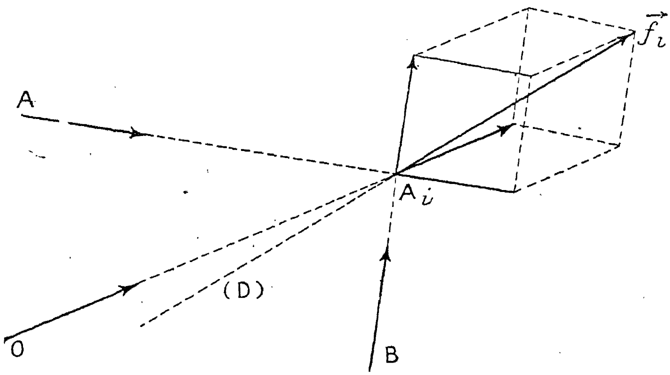
les parenthèses désignent des systèmes de vecteurs et $x, y, \ldots$ des scalaires quelconques. Ces identités apparaissent évidentes si l'on considère l'interprétation des divers membres des égalités. Il résulte notamment de la première que le *quotient d'un système* (Σ) *par un scalaire* x [c'est-à-dire le système (Σ') dont le produit par x donne (Σ)] est le produit du système (Σ) par l'inverse de x

192. **Produit ou moment relatif de deux systèmes.** — *On appelle « produit » ou « moment relatif » de deux systèmes* (Σ), (Σ') *la somme des moments relatifs de chaque vecteur de* (Σ) *par rapport à chaque vecteur de* (Σ').

a. Étant donné un système de vecteurs glissants, on peut toujours, en faisant un certain nombre d'opérations élémentaires, le remplacer par un système de trois vecteurs passant par des points donnés O, A, B non en ligne droite.

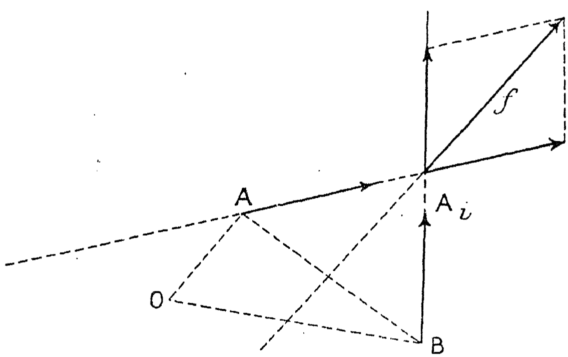
Effectivement, soit $\overrightarrow{f_i}$ un vecteur quelconque du système. S'il

Fig. 80.



n'est pas dans le plan OAB on peut trouver sur sa ligne d'action un point A_i qui ne soit pas non plus dans ce plan; faisons glisser $\overrightarrow{f_i}$ sur

Fig. 81.



sa ligne d'action de façon à amener son origine en A_i, et décomposons ce nouveau vecteur en trois, suivant les droites OA_i, AA_i, BA_i non situées dans un même plan. Si le vecteur est dans le plan OAB,

rable de se borner à l'expression du moment relatif à partir dès résultantes générales et moments résultants.

III. — RÉDUCTION D'UN SYSTÈME DE VECTEURS.

197. Définition de la réduction. — Le mot *réduction* est employé avec diverses acceptions dans la théorie des systèmes de vecteurs.

On dit quelquefois (n° 182) que l'on a fait la réduction d'un systèmes de vecteurs par rapport à un point O, lorsqu'on a calculé la résultante générale et le moment résultant par rapport à O, soit encore les six coordonnées par rapport à trois axes issus de O.

On dit aussi qu'on a *réduit un système de vecteurs* lorsqu'on a trouvé un système équivalent composé d'un petit nombre de vecteurs, disposés simplement. En ce sens, dans la démonstration du n° 194, on a « réduit » les systèmes (Σ), (Σ') à des systèmes de deux vecteurs.

C'est de ce second mode de réduction dont nous allons nous occuper dans le présent paragraphe. Nous énumérerons quelques-uns des systèmes « simples » de vecteurs équivalents à un système donné. Nous ne nous occuperons plus de la façon de les obtenir par des opérations élémentaires, nous contentant de savoir que la chose est possible ([1]).

198. Couple. — Considérons d'abord un système de vecteurs dont *la résultante générale est nulle :* pour un tel système le *moment résultant est indépendant du centre des moments.*

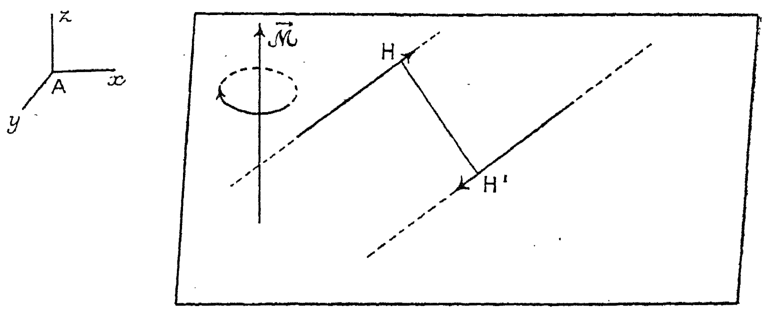
Effectivement, dans la formule de transformation des moments résultants (n° 183), la résultante générale étant nulle, il reste

$$' = \mathrm{Mom}_0 .$$

Parmi les systèmes équivalents au système considéré, il en existe

([1]) Dans beaucoup de Traités élémentaires, on trouve le point de vue opposé (plus ou moins inspiré par les travaux de Poinsot); la réduction des systèmes de vecteurs y est faite en utilisant les opérations élémentaires. On alourdit ainsi les exposés de démonstrations géométriques, qui ont le tort de ne plus s'appliquer au cas des distributions continues.

une infinité qui sont constitués par deux vecteurs opposés portés par des lignes d'action distinctes (on dit encore deux vecteurs égaux parallèles et de sens contraire). Il suffit en effet de se donner un plan perpendiculaire au moment $\vec{\mathfrak{M}}$ du système, dans ce plan deux droites parallèles quelconques et sur ces droites des vecteurs opposés,



tels que : 1° le produit de leur module commun par la distance HH' soit égal au module du moment $\vec{\mathfrak{M}}$; 2° un observateur, placé entre les droites perpendiculairement au plan, dans le sens de $\vec{\mathfrak{M}}$, voit ces deux vecteurs tourner dans le sens positif (l'espace étant bien entendu orienté). On dit encore que, pour un observateur perpendiculaire au plan dans le sens du moment, les deux vecteurs paraissent faire tourner leur « bras de levier » HH' dans le sens positif.

Pour un tel système de vecteurs la résultante générale est effectivement nulle; le moment résultant est donc indépendant du centre des moments : en le prenant par exemple par rapport à H, on voit qu'il est égal à $\vec{\mathfrak{M}}$, d'après les conditions imposées aux vecteurs. On peut vérifier aisément que la construction donnée est la construction la plus générale d'un tel système de vecteurs.

On appelle couple tout système de vecteurs dont la résultante générale est nulle (réduit ou non à un système de deux vecteurs). Un couple est ainsi défini par le vecteur qui représente son moment pris par rapport à un point quelconque; ce vecteur est axial ou polaire suivant que tous les vecteurs du système sont polaires ou axiaux.

199. Divers cas de réduction. — Nous sommes maintenant en mesure d'examiner les divers cas de réduction des systèmes de vecteurs; nous les distinguerons d'après les valeurs des invariants scalaires (n° 184) :

$$\left(\vec{\mathcal{R}}\right)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}.\mathcal{M}.$$

1° *Cas général :* $\vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{M}}$ *n'est pas nul.* Le système est alors équivalent à la somme de deux systèmes :

a. un vecteur unique équipollent à $\vec{\mathcal{R}}$*, appliqué en un point* O;

b. un couple ayant comme moment le moment du système par rapport à O.

C'est là une propriété manifeste : la somme des deux systèmes a bien $\vec{\mathcal{R}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ comme résultante générale et moment résultant (la résultante générale du couple est nulle et d'autre part le moment par rapport à O du vecteur unique est aussi nul). On voit en outre que cette décomposition varie suivant le point O adopté, mais le couple n'est jamais nul; en effet, s'il en était autrement, le produit $\vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{M}}$, qui est un invariant, étant nul pour une position particulière de O $\left(\vec{\mathcal{M}}\right.$ devenant nul$\left.\right)$, le serait constamment.

Cette propriété démontre le fait, énoncé au n° 182, qu'il existe toujours un système ayant des éléments de réduction donnés *a priori*.

2° $\vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{M}} = 0$, *mais* $\left(\vec{\mathcal{R}}\right)^2$ *non nul.* Dans ce cas, *le système est équivalent à un vecteur unique équipollent à* $\vec{\mathcal{R}}$ *et défini à un glissement près sur sa ligne d'action.*

Il suffit en effet de prouver qu'on peut trouver un point I tel que l'on ait

$$\vec{OI} \wedge \vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}};$$

$\vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{M}}$ étant nul, c'est-à-dire $\vec{\mathcal{R}}$ étant perpendiculaire à $\vec{\mathcal{M}}$, l'équation précédente constitue une « division géométrique » possible

séquent sur l'axe central, a une valeur constante indépendante du point O. Le moment résultant est donc de module minimum lorsqu'il est parallèle à l'axe central, ce qui exige que le centre des moments soit sur cet axe : *l'axe central est le lieu des points de moment minimum.*

Soient P un point quelconque de l'espace; I sa projection (orthogonale) sur l'axe central; les éléments de réduction du système au point I étant

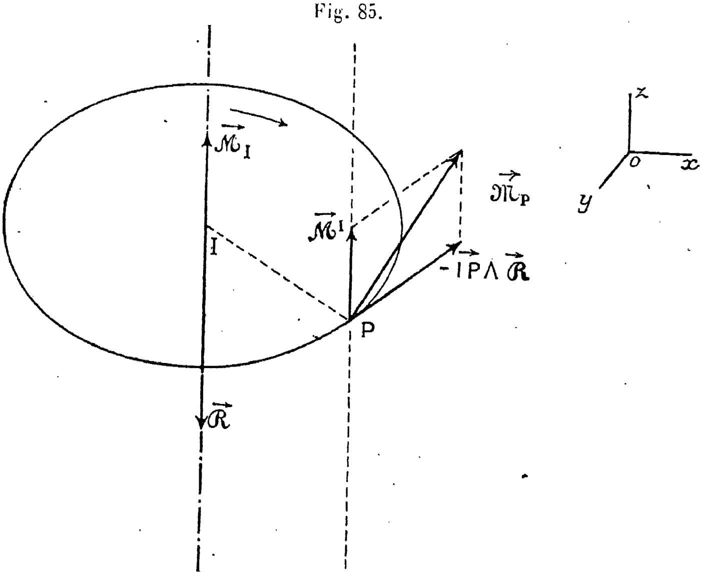
$$\vec{\mathcal{R}} \quad \text{et}$$

le moment résultant au point P *a pour expression*

$$= k\vec{\mathcal{R}} - \overrightarrow{IP} \wedge \vec{\mathcal{R}}.$$

Ce moment est la somme de deux vecteurs : 1° le vecteur $k.\vec{\mathcal{R}}$, parallèle à l'axe central, indépendant de la position de P; 2° le vecteur $\overrightarrow{PI} \wedge \vec{\mathcal{R}}$, perpendiculaire à l'axe central et au « rayon » IP, dont le module a pour valeur : $\overline{IP}.\left|\vec{\mathcal{R}}\right|$. — Quand le point P décrit une

Fig. 85.



parallèle à l'axe central, ce deuxième vecteur reste équipollent à lui-même; quand P décrit une circonférence de centre I, normale à l'axe, ce vecteur reste constamment tangent à la circonférence, son module demeurant invariable.

Le champ des moments présente par suite par rapport à l'axe central certains caractères de symétrie qu'on peut exprimer en disant que *si* P *glisse parallèlement* (¹) *à l'axe* (Δ) *ou tourne autour de cet axe, il en est de même du moment* $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_P$.

Dans le *premier cas de dégénérescence* envisagé, $\left[\vec{\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathfrak{M}}\right.$ nul, $(\vec{\mathcal{R}})^2$ non nul$\left.\right]$, les équations précédentes subsistent encore : k est nul et l'axe central est le lieu des points pour lesquels le moment est nul; c'est la ligne d'action du vecteur unique équivalent au système. Dans les *deux derniers cas de dégénérescence* il n'y a plus d'axe central à proprement parler.

201. Droites de moment nul. — *On appelle droite de moment nul d'un système* (Σ) *toute droite par rapport à laquelle le système a un moment nul* (²).

En désignant par (U) le système constitué par un vecteur unitaire porté par une telle droite (δ), on doit avoir (nᵒˢ 185 et 192)

$$o = (\Sigma).(U) = \vec{u}.\overrightarrow{\mathfrak{M}} + \vec{m}.\vec{\mathcal{R}}.$$

On a désigné comme d'ordinaire par $\vec{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$; $\vec{u}$ et $\vec{m}$ les éléments

(¹) Si PP′ est parallèle à (Δ) on a $\mathfrak{M}_P = \mathfrak{M}_{P'}$; cette condition suffisante est nécessaire, car

donc le produit extérieur ne peut être nul que si $\overrightarrow{PP'}$ est parallèle à $\vec{\mathcal{R}}$.

(²) *Si le système* (Σ) *n'est pas dégénéré, en tout point d'une droite de moment nul, le moment de* (Σ) *est perpendiculaire à cette droite.*

En effet, le moment de (Σ) par rapport à un axe étant égal à la projection sur cet axe du moment par rapport à un point de l'axe, pour que cette projection soit nulle il faut que le moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ soit nul ou perpendiculaire à l'axe. Or si le système (Σ) n'est pas dégénéré, en aucun point de l'espace le moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ n'est un vecteur nul (n° 199, 1°), il y a donc perpendicularité.

Définissons la droite donnée (D) par un vecteur unitaire $\vec{u}$ et son moment $\vec{m}_0$ par rapport à un point O $\left(\vec{u}.\vec{m}_0 = 0\right)$; en désignant par (U) le système formé par le vecteur $\vec{u}$, il faut montrer que (Σ) peut se mettre sous forme de la somme d'un système λ(U) et d'un autre système (G), dégénéré, se réduisant aussi à un vecteur unique

Cherchons donc, dans le faisceau défini par (Σ) et (U), un système dégénéré différent de (U) (d'après le numéro précédent, nous savons qu'il en existe en général un et un seul). Les éléments de réduction de (G) par rapport au point O étant

on doit avoir

$$-\lambda \vec{m}_0) = \vec{\mathcal{R}} \qquad | = 0$$

[le terme en λ^2 disparaît à cause de la condition $\vec{u}.\vec{m}_0 = 0$, qui exprime que (U) est un des deux systèmes dégénérés du faisceau].

Si la droite donnée (D) n'est pas une droite de moment nul, $\left(u.\mathfrak{M}_0 + m_0.\mathcal{R} \neq 0\right)$, cette équation définit une valeur λ_1 de λ, et par conséquent un système dégénéré (G).

Si $\vec{u}$ n'est pas parallèle à $\vec{\mathcal{R}}$, (G) est de la forme

(U′) désignant le système formé par un vecteur unitaire $\left(\vec{u}', \vec{m}'_0\right)$ défini par

$\longrightarrow$

le vecteur $\vec{u}'$ définit une droite (D′).

Les deux droites (D) et (D′) ne sont ni concourantes ni parallèles car le moment relatif des systèmes (U) et λ'(U′)

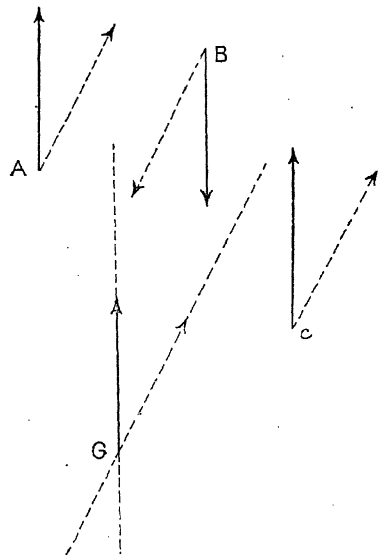
est par hypothèse différent de zéro.

Si $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{\mathcal{R}}$ [la droite (D) donnée, parallèle à l'axe cen-

Tout système de vecteurs parallèles est équivalent : à un vecteur unique, si la somme des mesures des vecteurs n'est pas nulle; à un couple ou à un système nul, si la somme des mesures est nulle.

208. Centre de vecteurs parallèles. — Soit un ensemble fini ou une distribution continue de vecteurs parallèles définis comme suit : s'il s'agit d'un ensemble fini, prenons un ensemble fini de points A,

ig. 87.



B, ..., chaque point étant affecté d'un coefficient numérique m_A, m_B, ..., et donnons-nous d'autre part un vecteur quelconque $\vec{u}$; nous considérerons le système de vecteurs

$$m_A.\vec{u} \text{ en } A, \qquad\qquad \text{en } B,$$

s'il s'agit d'une distribution continue, prenons un point A variable sur une ligne, sur une surface ou dans un volume et soit $\delta(A)$ un coefficient numérique fonction de la position de A, donnons-nous d'autre part un vecteur quelconque $\vec{u}$; nous considérerons la distribution continue ayant en tout point A un moment linéaire, superficiel ou spécifique nul et une résultante linéaire, superficielle ou spécifique

Si un vecteur a une vitesse constamment nulle, *il reste constamment équipollent à un vecteur fixe;* en particulier, s'il est nul à un certain instant, il reste constamment nul. On en déduit notamment que : *si deux points* M *et* M' *coïncident à un instant et ont constamment le même vecteur vitesse* [par rapport à un système (Σ)], *ils restent constamment confondus*, puisque le vecteur qui les joint est constamment nul.

212. Accélération d'un point. — L'hodographe du vecteur vitesse est appelé « *l'hodographe du mouvement* ». La dérivée par rapport à t du vecteur vitesse est le *vecteur accélération*. D'après le numéro précédent, l'accélération est donc la « vitesse du vecteur vitesse » ou encore la « vitesse sur l'hodographe du mouvement ».

On donne en général comme origine au vecteur accélération la position du point mobile à l'instant t considéré

$$' = \gamma = \frac{}{dt} = \frac{}{dt^2}$$

Ce vecteur est indépendant du point fixe O; ses composantes sur les axes du trièdre de Frenet se déduisent de la formule qui donne la différentielle seconde de $\overrightarrow{OM}$ (n° 126) :

$$d^2 s$$

Le vecteur accélération est donc contenu dans le plan osculateur à la trajectoire; il est la somme de deux vecteurs portés respectivement par la tangente et la normale principale :

Le premier, qu'on appelle « *accélération tangentielle* », a pour mesure, sur la tangente orientée dans le sens des arcs croissants,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \qquad dv$$

le second, qu'on appelle « *accélération normale ou centripète*, » a pour mesure, sur la normale orientée dans le sens de la courbure,

$$\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{R}; \qquad \text{R rayon de courbure.}$$

laire à $\vec{k}$ avec la demi-droite AI de ce plan, telle que $(\mathrm{AI}, \mathrm{AJ}) = \frac{\pi}{2}$:

$$\psi' = (\mathrm{AI}, \vec{r}).$$

On peut encore définir le solide (S) par la position du trièdre trirectangle $\mathrm{A}x$, $\mathrm{A}y$, $\mathrm{A}z$, d'origine A, dont l'axe $\mathrm{A}z$ est parallèle à $\vec{k}$ et de même sens, l'axe $\mathrm{A}x$ parallèle à $\vec{r}$ et de même sens, enfin l'axe $\mathrm{A}y$ perpendiculaire aux deux autres et tel que $\mathrm{A}x, y, z$ soit de même sens que OX, Y, Z. Pour définir la position de ce trièdre, on se donne les coordonnées de A et les angles d'Euler θ, ψ, φ par rapport à OX, Y, Z (n° 63). Il est à remarquer que ces angles sont liés simplement aux précédents. On trouve, en effet, presque immédiatement, en supposant que le sens de la ligne des nœuds est le sens choisi ci-dessus pour AI :

$$\theta' = -\theta, \quad \varphi' = \iota \qquad \psi' = \varphi.$$

Quel que soit le choix adopté, *la position du solide* (S) *est définie par rapport à* (Σ) *par six scalaires; son mouvement est caractérisé par six fonctions scalaires du temps*, et les vitesses de ses divers points doivent pouvoir s'exprimer au moyen des dérivées de ces six fonctions.

214. Relation entre les vitesses de deux points. — *Si deux points* A *et* B *appartiennent à un même corps solide mobile, les projections de leurs vitesses respectives sur la droite* AB, *à un instant t, sont égales.*

Effectivement, si les points A et B appartiennent à un même corps solide, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a un module constant, sa dérivée lui est perpendiculaire (n° 90), de sorte que

$$0 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \frac{d(\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{dt} \quad \left[\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \frac{d(\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{dt}\right] - \left[\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \frac{d(\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{dt}\right];$$

les deux scalaires entre crochets sont égaux au produit, par le module de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, des mesures des projections sur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ des vitesses de B et A, dont

l'égalité apparaît ainsi. Cette propriété résulte encore de la proposition du n° 211 : la projection sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de sa vitesse est en effet nulle dans le cas présent.

A un instant donné les vitesses des points d'un corps solide forment donc un champ de vecteurs (n° 143) *qui possède la propriété suivante :*

« *Les projections de deux de ces vecteurs sur la droite qui joint leurs points d'application sont égales.* »

Or cette propriété est caractéristique d'un champ de moments (la démonstration de cette proposition est donnée en note au n° 183) ; on en déduit que *les vitesses des divers points d'un corps solide à un instant donné sont identiques au champ de moments d'un certain système de vecteurs*. Nous établirons encore cette dernière propriété par une voie directe, de façon à mettre en évidence la détermination des éléments du système de vecteurs.

215. **Mouvements tangents.** — *On dit que les mouvements de deux corps solides* (S) *et* (S'), *par rapport à un même corps* (Σ), *sont tangents à un instant t, si tout point* M' *de* (S') *a même vecteur vitesse à l'instant t que le point* M *de* (S) *avec lequel il coïncide à cet instant* (¹) (les deux champs des vecteurs vitesses sont identiques). Cette propriété est évidemment réciproque.

Si deux corps solides ont des mouvements constamment tangents, ces corps solides restent constamment en coïncidence. Effectivement tout point M' de l'un reste constamment confondu avec le point M de l'autre, avec lequel il coïncidait à un instant déterminé (n° 211).

Pour que deux corps solides (S) *et* (S') *aient* [par rapport à un corps (Σ)] *des mouvements tangents à un instant t, il faut et il suffit que trois points* A, B, C *de* (S), *distincts et non en ligne droite, aient les mêmes vecteurs vitesses que les trois points* A', B', C' *de* (S'), *avec lesquels ils coïncident à l'instant considéré.*

(¹) Cette notion de mouvement tangent est évidemment une fiction mathématique analogue à celle de la coïncidence de deux corps « égaux » et suppose la possibilité, au moins théorique, de « l'interpénétration ».

dans le mouvement de translation $\vec{\mathcal{R}} = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_A$; dans le mouvement de rotation, $\vec{v}_A$ est nul pour tout point A pris sur l'axe de rotation ; dans le mouvement de rotation et glissement, $\vec{v}_A$ est constant et parallèle à $\vec{\omega}$ pour tout point A pris sur l'axe de rotation et glissement.

220. Vitesse d'un corps solide. — Si, dans le calcul précédent, on remplace le point A par un autre point B, on obtient un nouveau système (σ') caractérisé par la même résultante générale $\vec{\omega}$ et le moment résultant par rapport à B, $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{v}_B$. Ce nouveau système ayant même moment que le précédent par rapport à tout point de l'espace doit lui être équivalent et effectivement, on a bien

$$\wedge \; \vec{AB} = \vec{\mathcal{M}}_A - \qquad (\vec{\omega} \text{ en B}).$$

Le système (σ), défini à une équivalence près, est appelé la *vitesse du solide à l'instant t*. Sa résultante générale $\vec{\omega}$, la rotation instantanée, est un vecteur *libre*, *axial* (son produit extérieur par le vecteur polaire $\vec{MA}$ ne doit pas changer avec l'orientation de l'espace), et ayant pour dimensions l'inverse d'un temps. Son moment résultant $\vec{v}_A$ par rapport à A est un vecteur *lié*, *polaire* et ayant les dimensions d'une vitesse (quotient d'une longueur par un temps).

Nous verrons plus loin comment on peut interpréter, au point de vue de la Cinématique, la décomposition du système (σ) en une somme d'autres systèmes et, en particulier, en une somme de systèmes composés respectivement de vecteurs glissants uniques. Nous allons interpréter d'abord les divers cas de réduction et en déduire des mouvements tangents simples.

221. Axe instantané de rotation et de glissement. — Supposons d'abord le système (σ) non dégénéré, c'est-à-dire son invariant non nul :

$$\vec{\omega} . \vec{v}_A \neq 0.$$

Le système a alors un axe central (Δ), parallèle à $\vec{\omega}$, défini par

le lieu des points de vitesse minima (n° 200), et notamment de vitesse nulle, si l'invariant est nul.

L'axe instantané de rotation et de glissement est la seule droite telle que la vitesse de chacun de ses points lui soit parallèle.

Le *moment de* (σ) *par rapport à un axe* D est la projection sur cet axe de la vitesse de l'un de ses points (n° 185); cette projection est donc constante : c'est ce qui a déjà été démontré au n° 214.

Si (σ) n'est pas dégénéré, il y a une infinité de *droites de moment nul* (n° 201) : ce sont les droites D de (S) perpendiculaires à la vitesse de chacun de leurs points. Un plan P de (S) a un « foyer » p où se croisent toutes les droites de moment nul qu'il contient : ce point p est le seul point du plan dont la vitesse lui soit perpendiculaire; ce foyer est rejeté à l'infini si P est parallèle à l'axe instantané. Inversement, le plan focal P d'un point p est normal à la vitesse de p, donc à la trajectoire de p. On en déduit notamment l'interprétation de la propriété des droites conjuguées : *les plans normaux à un instant t aux trajectoires de tous les points d'une droite* D *se coupent suivant la droite* D' *conjuguée de* D. Si D est droite de moment nul, elle est confondue avec D'; les plans normaux aux trajectoires des points de D contiennent tous D. Si D est parallèle à l'axe instantané, D' est rejetée à l'infini : les vitesses des points de D et par suite les plans normaux aux trajectoires sont parallèles entre eux.

224. Mouvement du trièdre de Frenet. — Nous allons appliquer les résultats précédents au mouvement du trièdre de Frenet associé à une courbe (C) plane ou gauche (n° 125) et défini par les trois vecteurs unitaires rectangulaires $\vec{u}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Nous supposons que son origine M parcourt la courbe d'un mouvement uniforme, de vitesse 1, dans le sens des arcs, de sorte que $s = t$.

Ce trièdre constitue un solide (S) dont le mouvement est ainsi défini. La *vitesse de* (S), à un instant t, ou plus exactement pour une certaine position, est caractérisée par son moment résultant par rapport à M,

$$\vec{\mathfrak{M}}_M = \vec{v}_M = \vec{u},$$

et sa résultante générale ou rotation instantanée qui est (n° 219)

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} \qquad \frac{d\vec{u}}{}$$

Cette propriété de composition s'étend immédiatement (par récurrence) au cas de plusieurs corps solides intermédiaires. Soient (S_1), (S_2), ..., (S_n) et (Σ) des solides mobiles les uns par rapport aux autres et soient, à un instant donné, (σ_1) la vitesse de (S_1) par rapport à (S_2), (σ_2) la vitesse de (S_2) par rapport à (S_3), ..., (σ_n) la vitesse de (S_n) par rapport à (Σ); la vitesse (σ) de (S_1) par rapport à (Σ) est la somme de ces divers systèmes :

En particulier si les systèmes (σ_i) représentent respectivement des rotations tangentes, ils se réduisent chacun à un vecteur glissant unique : le système résultant (σ) est le système de vecteurs glissants constitué par ces divers vecteurs.

Remarquons encore *que la vitesse de* (Σ) *par rapport à* (S) *est le système opposé à la vitesse de* (S) *par rapport à* (Σ), car leur somme doit donner un système nul.

Comme application considérons dans un corps (S) trois axes trirectangles Ax, Ay, Az de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ et de même dans un corps (Σ) trois axes OX, OY, OZ de vecteurs unitaires $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$; soient d'autre part, suivant les notations adoptées dans la définition des angles d'Euler (n° 63) : $\overrightarrow{AI}$ un vecteur unitaire parallèle à la fois aux deux plans Ax, y, AX, Y; $\overrightarrow{AJ}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire dans le plan AX, Y; $\overrightarrow{Aj}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire dans le plan Ax, y.

Introduisons entre (S) et (Σ) les solides intermédiaires (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) définis respectivement par les trièdres :

$$AI, j, z; \quad AI, J, Z; \quad AX, Y, Z; \quad OX, Y, Z.$$

Les mouvements de ces solides les uns par rapport aux autres sont simples; on obtient immédiatement leurs vitesses relatives (σ_1), (σ_2), (σ_3), (σ_4); en appelant toujours θ, ψ, φ les angles d'Euler, elles se réduisent respectivement aux trois rotations et à la translation :

(σ_1) : $\quad \vec{k}.\varphi'$; $\qquad (\sigma_2)$: $\quad \overrightarrow{AI}.\theta'$;

peut être considérée comme la résultante de deux rotations opposées, portées par des axes différents (n° 198).

Un système (σ) étant en général équivalent à un vecteur et à un couple, *le mouvement le plus général d'un solide peut être considéré comme la résultante d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation;* on peut même supposer que la translation est parallèle à l'axe de la rotation, en prenant pour axe de cette rotation l'axe instantané de rotation et de glissement (n° 221).

On peut encore décomposer le mouvement d'un solide en deux rotations, dont l'une autour d'un axe arbitrairement choisi (différent toutefois d'une droite de moment nul du système); l'autre rotation se fait alors autour de la droite conjuguée (n° 203).

En interprétant les résultats indiqués pour la réduction des systèmes particuliers de vecteurs, on voit que : plusieurs rotations autour d'axes concourants ont pour résultante une rotation (n° 206) autour d'un axe passant par le point de concours ou exceptionnellement le repos; des rotations autour d'axes parallèles ont pour résultante une rotation autour d'un axe parallèle (n° 207) ou exceptionnellement une translation ou encore le repos (¹).

239. Mouvement de surfaces en contact. — Considérons deux corps solides (S_1) et (S_2) limités par des surfaces qui restent en contact par un ou plusieurs points variables, pouvant même former des lignes ou des surfaces continues; le contact signifie qu'aux points communs les plans tangents aux deux surfaces coïncident. A un instant t la vitesse (σ) de (S_2) par rapport à (S_1) est la différence des vitesses de (S_2) et (S_1) par rapport à un autre corps solide quelconque (Σ) [différence d'ailleurs indépendante de (Σ)]. Formons les éléments de réduction de cette vitesse par rapport à l'un des points de contact M.

Le moment résultant est la différence des vitesses par rapport à un même corps (Σ) des points m_2 et m_1 appartenant respectivement à (S_2) et (S_1) et coïncidant avec M à l'instant considéré; cette diffé-

(¹) On peut établir ces divers résultats indépendamment de la règle de distribution des vitesses d'un corps solide et comme simple application de la règle de composition des vitesses d'un point et de la distribution des vitesses dans les mouvements de translation et de rotation. On pourrait en déduire ensuite la distribution des vitesses d'un corps solide, en décomposant son mouvement en la translation d'un point et en trois rotations fournies par les variations des angles d'Euler.

lation tangente (n° **222**, 2°); donc, à chaque instant il existe, en général, un axe instantané iz de rotation et de glissement (ou de rotation seule); la rotation instantanée $\vec{\omega}$ est parallèle à cet axe. Les éléments de réduction de la vitesse par rapport à i (ou à tout autre point de l'axe) sont $\vec{\omega}$ et $\vec{v}_1 = k.\vec{\omega}$. Inversement iz, $-\vec{\omega}$ et $-k.\vec{\omega}$ sont l'axe instantané et les éléments de réduction de la vitesse de (S_1) par rapport à (S_2).

Soient $i_1 z_1$ *et* $i_2 z_2$ *les droites de* (S_1) *et* (S_2) *qui, à l'instant* t, *viennent coïncider avec l'axe instantané* iz; *le lieu* s_1 *de* $i_1 z_1$ *dans* (S_1) *est appelé la surface base; le lieu* s_2 *de* $i_2 z_2$ *dans* (S_2) *est appelé la surface roulette*. On distingue la base de la roulette parce que (S_1) est plus spécialement considéré comme fixe (ou absolu) et (S_2) comme mobile. Certains auteurs désignent ces surfaces sous le nom de « *surfaces des axes* » ou encore « *axoïdes* » (1).

Désignons par $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ des vecteurs unitaires de (S_1) et (S_2) qui à l'instant t coïncident avec la direction de l'axe instantané, par m_1 et m_2 les points de (S_1) et (S_2) qui coïncident au même instant avec un point m de cet axe, par A et B des points fixes dans (S_1) et (S_2). Les vecteurs $\overrightarrow{Ai_1}$, $\vec{a}_1$ d'une part, $\overrightarrow{Bi_2}$, $\vec{a}_2$ d'autre part sont des fonctions de t; les surfaces base et roulette sont alors définies comme les hodographes des fonctions de t et λ :

$$\text{Base} \ldots\ldots\ldots \qquad \overrightarrow{Am_1} = \overrightarrow{Ai_1} + \lambda.\vec{a}_1$$

$$\text{Roulette} \ldots\ldots \qquad \overrightarrow{Bm_2} = \overrightarrow{Bi_2} + \lambda.\vec{a}_2.$$

Ces surfaces réglées s_1 et s_2 sont fixes respectivement dans (S_1) et (S_2) et par suite sont mobiles l'une par rapport à l'autre. Elles ont en commun à chaque instant une génératrice iz; cette génératrice iz est mobile tant par rapport à (S_1) que par rapport à (S_2).

(1) C'est notamment la locution employée dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, IV-6, n° 24. Article de MM. Kœnigs. Schoenflies.

232. Contact des surfaces base et roulette. — Le mouvement de s_2 par rapport à s_1 est appelé « *viration* ». Nous allons d'abord montrer que dans ce mouvement *les surfaces base s_1 et roulette s_2 ont, à un instant quelconque, même plan tangent en tout point de l'axe instantané, qui est alors une* (1) *génératrice commune à ces deux surfaces.* Les deux surfaces sont en contact le long de l'axe instantané; on dit encore qu'elles sont « *circonscrites* » ou « *se raccordent* » *suivant cet axe.*

Considérons en effet, à un instant t_0, les équations précédentes définissant s_1 et s_2 dans les positions de (S_1) et (S_2) à cet instant. Pour cette valeur t_0, i_1 et i_2, dont la position est fonction de t, coïncident avec le point i, les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont aussi égaux à un même vecteur $\vec{a}$. L'axe instantané, commun aux deux surfaces, est le lieu du point m, position commune de m_1 et m_2, obtenu en faisant varier λ et donnant à t la valeur t_0 dans l'une ou l'autre des équations.

Ceci posé, les vecteurs normaux en m aux surfaces s_1 et s_2 s'obtiennent en formant le produit extérieur des dérivées partielles par rapport à t et λ de $\overrightarrow{Am_1}$ et $\overrightarrow{Bm_2}$ pour $t = t_0$ (n° 144). On obtient ainsi

car les dérivées partielles sont égales aux vitesses à l'instant t_0, du point m (correspondant à une valeur donnée de λ) par rapport à (S_1) (vitesse absolue) et par rapport à (S_2) (vitesse relative). Leur différence est donc la vitesse d'entraînement; comme m est sur l'axe instantané cette vitesse est parallèle à l'axe, donc

$$dt \qquad \wedge \vec{a} = 0.$$

Les vecteurs normaux $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont donc égaux, en tout point m de iz, ce qui établit la propriété.

(1) Elles peuvent en avoir d'autres.

est perpendiculaire au plan tangent à l'infini (n° 149)] viennent aussi l'un sur l'autre.

Donc dans la correspondance de s_2 et s_1, sur les génératrices correspondantes, les points centraux se correspondent. On peut supposer notamment que ce sont les points i_1 et i_2 dont les lieux sont alors les « lignes de striction » de s_1 et s_2.

Dans ces conditions, les systèmes de trois vecteurs considérés au numéro précédent deviennent trirectangles [en effet $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont normaux à $\vec{a}$; d'autre part $\vec{V}$ normal à la surface au point central et $\vec{W}$ normal au point à l'infini sont rectangulaires (n° 149)].

Pour que les deux figures soient égales, il faut d'abord que les vecteurs $\vec{W}_1$ et $\vec{W}_2$ aient même module. Comme $\overrightarrow{da_1}$ et $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{da_2}$ et $\vec{a}_2$ sont respectivement perpendiculaires : $\overrightarrow{da_1}$ a_1

W_2 da_2 a_2 ; cette condition est donc équivalente à l'égalité des modules

$$|da_1 = |da_2$$

Ceci acquis, le vecteur $\vec{V}_1$, perpendiculaire à $\vec{a}_1$ et à $\vec{W}_1$, se trouve parallèle à $\overrightarrow{da_1}$; de même $\vec{V}_2$ est parallèle à $\overrightarrow{da_2}$. Pour qu'il y ait égalité des figures, il suffit donc, en plus de la condition énoncée, qu'il y ait égalité entre les rapports de ces vecteurs parallèles ou, ce qui revient au même, entre leurs produits intérieurs. Donc :

$$\vec{da}_1.(\qquad b_2/\backslash$$

Il est à remarquer que ces deux égalités entraînent celle des paramètres de distribution sur les génératrices correspondantes : ces paramètres sont en effet (n° 149) les quotients des modules de $\vec{V}_1$ par $\vec{W}_1$ et de $\vec{V}_2$ par $\vec{W}_2$. La première égalité définit par exemple une correspondance entre les lignes de striction, la seconde doit alors se trouver vérifiée.

On obtient notamment une telle correspondance en considérant deux surfaces égales s_1 et s_2; on prend sur les lignes de striction des points i_1 et i_2 qui viendraient l'un sur l'autre dans la coïncidence des

d'après les formules de Frenet, $\frac{ds_1}{R_1}$ (n° 123) (s_1 arc de courbe sur l'arête de rebroussement, R rayon de courbure de l'arête). Si s_1 est un cône, $|\overrightarrow{da_1}|$ est la différentielle $d\sigma$ de l'arc de la courbe intersection du cône par une sphère de rayon 1 ayant son centre au sommet. En introduisant des notations analogues pour s_2, les divers types de correspondance peuvent donc s'écrire :

2 développables : $\frac{|d.}{R}$

Cône et développable : $\frac{|d.}{R_1}$

2 cônes : $d\sigma_1 \;\; = d\sigma_2$.

On voit que dans le premier cas la correspondance conserve les angles de contingence sur les arêtes de rebroussement. Nous reviendrons au numéro suivant sur le cas des deux cônes.

Si *l'une des surfaces est un cylindre*, le point singulier de chaque génératrice est rejeté à l'infini, il en est de même pour *l'autre surface* qui *est aussi un cylindre*.

Prenons alors pour i_1 et i_2 des points correspondants sur des courbes C_1, C_2, les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont constants; ce sont cette fois les vecteurs $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ qui s'annulent. Comme $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont aussi perpendiculaires à $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$, il suffit de réaliser l'égalité de leurs modules, d'où la relation

$$\left|\overrightarrow{db_1} \wedge \vec{a}_1\right| = \left|\overrightarrow{db_2} \wedge \vec{a}_2\right|.$$

Ces valeurs absolues sont les différentielles des arcs interceptés sur une section droite par les génératrices de i_1 et i_2. La correspondance est donc telle que des couples de génératrices correspondantes interceptent des arcs égaux sur les sections droites respectives des cylindres.

236. Roulement continu sans glissement. — Supposons que, dans le mouvement continu d'un solide (S_2) par rapport à un solide (S_1), il existe, à chaque instant, une rotation tangente. Les surfaces base

238. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. — Supposons que deux solides (S_1) et (S_2), mobiles l'un par rapport à l'autre, aient constamment en commun un point O. La vitesse de (S_2) par rapport à (S_1) se réduit donc à un vecteur (ou rotation) unique passant par O, puisque le moment de cette vitesse par rapport à O est nul. *Il y a, à chaque instant, une rotation tangente.*

Les surfaces base et roulette sont des cônes qui roulent l'un sur l'autre sans glisser d'après le mouvement décrit au numéro précédent.

Dans ce mouvement deux sphères de (S_2) et de (S_1), ayant pour centre O et de même rayon, restent constamment en coïncidence l'une avec l'autre.

239. Mouvement d'un corps solide dont un plan glisse sur un plan fixe. — Supposons qu'un plan P_2 du corps solide (S_2) reste constamment en coïncidence avec un plan P_1 de (S_1). Considérons la vitesse du solide (S_2) par rapport à (S_1) à un certain instant t et formons ses éléments de réduction par rapport à un point I du plan P_1, soient $\vec{v}_I$, $\vec{\omega}$. Le moment résultant, par rapport à I, $\vec{v}_I$, est parallèle à P_1 ; la rotation instantanée $\vec{\omega}$ doit être perpendiculaire à tous les vecteurs $\vec{v}_M - \vec{v}_I$, M désignant un autre point de P_1, elle est donc nulle ou perpendiculaire à P_1. L'invariant du système $\vec{v}_I . \vec{\omega}$ étant nul, le système se réduit à un vecteur unique ou à un couple.

Dans le mouvement d'un corps (S_2), *dont un plan glisse constamment sur un plan fixe de* (S_1), *il y a, à chaque instant, une rotation, ou exceptionnellement une translation, tangente.* Cette rotation est perpendiculaire à P. *Les surfaces base et roulette sont des cylindres qui roulent sans glisser l'un sur l'autre* ([1]).

([1]) La Note II contient une étude du mouvement d'un plan mobile glissant sur un plan fixe.

NOTE I.

COORDONNÉES OBLIQUES ET CURVILIGNES. CHAMPS DE SCALAIRES ET DE VECTEURS. INVARIANTS DIFFÉRENTIELS.

Nous donnons dans cette Note quelques indications brèves sur l'étude des champs de scalaires et de vecteurs (n° 143), c'est-à-dire sur l'étude des *fonctions scalaires ou vectorielles de trois variables scalaires.* Cette Note peut donc être considérée à certains points de vue comme une généralisation du Chapitre IV, qui généralisait lui-même le Chapitre III. Nous étudions d'ailleurs succinctement les coordonnées curvilignes de l'espace, de même que nous avions étudié la représentation d'une surface en coordonnées curvilignes (n° 136). Dans ce but nous avons d'abord esquissé le calcul des angles et distances en coordonnées obliques; les formules sont simples et symétriques lorsqu'on introduit simultanément les coordonnées « *contravariantes* » d'un vecteur; elles éclairent par la suite la raison d'être et les propriétés des invariants différentiels.

1*. Trièdres supplémentaires. — Dans les applications traitées au cours de cet Ouvrage nous avons considéré des *trièdres trirectangles*, avec *une même unité* sur les trois axes (*voir* n° 16); abandonnant cette restriction, nous appellerons désormais *trièdre* T un système de trois axes Ox, Oy, Oz qui ne sont pas dans un même plan, qu'on prend dans un ordre déterminé et sur lesquels on choisit des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dont les longueurs peuvent être différentes entre elles et différentes de l'unité adoptée pour l'espace (*voir* la note de la page 8). L'espace étant supposé orienté, le scalaire

est un nombre déterminé, non nul; il est positif ou négatif suivant que le trièdre T est lui-même positif ou négatif (n^os 17 et 32); sa valeur absolue est égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Nous l'appellerons le *déterminant du trièdre;* il est d'ailleurs égal au déterminant des composantes de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par rapport à un trièdre trirectangle direct.

les tableaux des coefficients de ces nouvelles substitutions sont

$$\begin{Vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{Vmatrix}$$

Les tableaux s, S, s', S′ définissent des substitutions linéaires qui ont entre elles des relations simples; nous allons préciser ces relations en indiquant quelques dénominations qui sont maintenant d'un usage assez répandu (et qui semble croître avec l'emploi du Calcul Tensoriel) :

Deux substitutions linéaires sont égales lorsque tous les éléments correspondants des tableaux sont égaux.

Deux substitutions linéaires sont inverses l'une de l'autre lorsqu'en les effectuant successivement à partir d'un système quelconque de variables on retrouve ce même système. Après permutation des lignes et des colonnes, les éléments de l'un des tableaux deviennent égaux aux mineurs (ou coefficients) de l'autre divisés par son déterminant. Les substitutions s et s', S et S′ sont respectivement inverses l'une de l'autre.

Deux substitutions linéaires sont symétriques l'une de l'autre si les tableaux de leurs coefficients se déduisent l'un de l'autre par permutation des lignes et des colonnes. Les substitutions s et S′, S et s' sont respectivement symétriques l'une de l'autre.

Deux substitutions linéaires sont contravariantes si l'une est la symétrique de l'inverse de l'autre et réciproquement. Chaque élément de l'une est égal au mineur (ou coefficient) de l'élément correspondant de l'autre divisé par son déterminant. Les substitutions s et S, s' et S′ sont respectivement contravariantes.

Les inverses ou les symétriques de deux substitutions contravariantes sont encore contravariantes.

4*. **Formules de transformation de coordonnées.** — En raisonnant comme au n° 62 on obtient immédiatement les relations entre les coordonnées contravariantes d'un même vecteur $\vec{a}$:

x, y, z; X, Y, Z par rapport aux trièdres supplémentaires T et T*;
x', y', z'; X′, Y′, Z′ par rapport aux nouveaux trièdres T′ et T*′.

Ce sont :

$$\begin{aligned} & & X &= A.X' - \qquad\qquad \cdot A''.Z', \\ y &= b.x' + b'.y' + b''.z', & Y &= B.X' - \qquad\qquad \cdot B''.Z', \\ & & Z &= C.X' - \end{aligned}$$

On passe des nouvelles variables aux anciennes par les substitutions S′ et s' contravariantes entre elles et respectivement symétriques des substitutions s et S qui font passer des anciens trièdres T et T* aux nouveaux T′ et T*′. Les nouvelles variables x', y', z' se déduisent des anciennes par les substitutions inverses des précédentes, c'est-à-dire S et s, qui sont toujours contravariantes entre elles.

Résumons les résultats de ce numéro et du précédent dans un tableau :

$$s \text{ fait passer de } \left\{ \begin{array}{ccc} T & \text{à} & T', \\ X, Y, Z & \text{à} & X', Y', Z'; \end{array} \right. \qquad S \text{ fait passer de } \left\{ \begin{array}{ccc} T^* & \text{à} & T^{*\prime}, \\ x, y, z & \text{à} & x', y', z'; \end{array} \right.$$

$$s' \text{ fait passer de } \begin{array}{ccc} T' & \text{à} & T, \\ X', Y', Z' & \text{à} & X, Y, Z; \end{array} \qquad S' \text{ fait passer de } \left\{ \begin{array}{ccc} T^* & \text{à} & T^*, \\ x', y'. z' & \text{à} & x, y, z. \end{array} \right.$$

Les relations entre les quatre substitutions sont :

Contravariantes dans une ligne;
Inverses dans une colonne;
Symétriques dans une diagonale.

Cas particuliers de changement de coordonnées. — Examinons d'abord *le changement de coordonnées en coordonnées contravariantes;* T et T* sont changés en T* et T; x, y, z et X, Y, Z sont changés en X, Y, Z et x, y, z. Dans le tableau des quatre substitutions, les substitutions des diagonales sont respectivement égales :

$$s = S', \qquad S = s'.$$

Dans s et S les termes symétriques par rapport à la diagonale principale doivent être égaux; on peut d'ailleurs écrire les tableaux de la manière suivante :

$$\left\| \begin{array}{ccc} \vec{I}^2 & \vec{I}.\vec{J} & \vec{I}.\vec{K} \\ \vec{J}.\vec{I} & \vec{J}^2 & \vec{J}.\vec{K} \\ \vec{K}.\vec{I} & \vec{K}.\vec{J} & \vec{K}^2 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i}^2, & \vec{i}.\vec{j} & \vec{i}.\vec{k} \end{array} \right.$$

Considérons encore le cas particulier d'un *changement de coordonnées rectangulaires;* alors T et T* d'une part, T′ et T*′ d'autre part sont respectivement égaux. Dans le tableau des substitutions

la substitution s est égale à sa contravariante, c'est-à-dire encore que sa symétrique est égale à son inverse. Une telle substitution est appelée *orthogonale.* Ses coefficients forment un tableau de neuf cosinus (n° 61); au produit près par -1, dans le cas où T et T′ sont de sens contraires.

Nous appellerons le trièdre défini par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (s'il existe) le *trièdre tangent en* A *au système de coordonnées;* cette expression se justifie parce que les trois vecteurs dérivés sont (du moins en général) tangents en A aux trois courbes coordonnées passant par ce point, c'est-à-dire respectivement à C_{v_0,w_0}, C_{w_0,u_0}, C_{u_0,v_0}.

Nous représenterons par δ le déterminant du trièdre tangent ([1]) et par $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ et Δ les vecteurs et le déterminant du trièdre supplémentaire.

Nous dirons qu'un point où le produit mixte des trois vecteurs dérivés partiels

$$\delta = \vec{u}.\left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$$

est nul est un *pôle du système de coordonnées.* On ne considère en général que des systèmes pour lesquels les pôles forment des lignes exceptionnelles ou sont des points isolés. La théorie des fonctions implicites montre que c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse, dans des régions suffisamment petites de l'espace, considérer u, v, w comme des fonctions uniformes de la position du point M.

On obtient notamment un pôle A si en ce point une (ou deux) coordonnée seulement est déterminée, les deux autres (ou l'autre) coordonnées pouvant prendre des valeurs quelconques. Effectivement, en supposant par exemple en ce point $v = v_0$, $w = w_0$ et u arbitraire, la dérivée $\vec{u}$ de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à u est nulle. Les pôles de cette espèce généralisent les points coniques des surfaces (n° 145).

7*. Exemples de systèmes de coordonnées. — 1° Les *coordonnées cartésiennes ordinaires* rectangulaires ou obliques sont, bien entendu, un cas particulier de coordonnées curvilignes. Si Ox, Oy, Oz sont les axes de repère, les surfaces coordonnées sont des plans parallèles aux plans de coordonnées, les lignes coordonnées sont les droites parallèles aux axes. Le trièdre tangent en un point quelconque est formé de vecteurs équipollents aux vecteurs unitaires des axes; le déterminant δ est constant et il n'y a pas de pôles.

2° *Coordonnées semi-polaires ou cylindriques.* — L'espace étant rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de

([1]) Si l'on désigne par x, y, z les projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur un trièdre trirectangle Ox, y, z, les vecteurs du trièdre tangent ont pour projections, sur le trièdre Ox, y, z, les dérivées partielles de x, y, z respectivement par rapport à u, v, w (généralisation de la proposition du n° 137) et le déterminant a pour valeur

$$\delta = \frac{}{D(u,\ v,\ w)}$$

(*déterminant fonctionnel* généralisant la notation du n° 139).

volume dans l'espace donné décrit par le point M, à celui d'une intégrale de volume dans l'espace du point image m :

Soit (v) le domaine décrit par m lorsque M décrit le domaine (V); nous supposerons qu'à la juxtaposition de deux domaines (V'), (V'') sans partie commune correspond la juxtaposition des domaines correspondants (v') et (v'') et qu'ils sont aussi sans partie commune; nous supposerons en outre qu'à un domaine (V) de volume Ω infiniment petit correspond un domaine (v) de volume ω infiniment petit. (Ces hypothèses sont vérifiées en particulier dans une région suffisamment petite ne contenant pas de pôles du système de coordonnées curvi-
s, où, par suite, le déterminant δ a un signe constant.) Dans ces conditions le scalaire I_V ou le vecteur $\vec{A}_V$ peuvent être considérés comme fonctions du domaine (v) et ils vérifient les propriétés

$$I_v = I_{v'} + I_{v''}, \qquad \text{limite}\,(I_v : \omega) = \lambda.\text{limite}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right.$$

ou

$$\vec{A}_v = \vec{A}_{v'} + \vec{A}_{v''}, \qquad \lim\left(\vec{A}_v : \omega\right) = \vec{a}.\text{limite}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right).$$

d'image a de coordonnées u_0, v_0, w_0. Considérons un point M voisin de A; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et par suite $\overrightarrow{AM}$ sont fonctions des accroissements de u, v, w :

$$\xi = u - u_0, \qquad \eta = v - v_0, \qquad \zeta = w - w_0.$$

En développant $\overrightarrow{AM}$ par la formule de Taylor (n° **141**), on a, en appelant $\vec{u}_0$, $\vec{v}_0$, $\vec{w}_0$ les vecteurs unitaires du trièdre tangent en A,

$$\overrightarrow{AM}$$

φ est une forme quadratique en ξ, η, ζ dont les coefficients, fonctions de ces mêmes variables, sont limités supérieurement en module.

Soit N le point défini par

$$\overrightarrow{AN} =$$

d'où

Faisons varier le point image m dans un cube à arêtes parallèles aux axes et défini par les inégalités

$$|\xi|,\ |\eta|,\ |\zeta| \leqq$$

le point N est compris dans un parallélépipède de centre A dont les arêtes sont des vecteurs équipollents à

succinctement quelques-unes de leurs propriétés. Il convient de signaler que ce ne sont pas là les seuls invariants différentiels d'un champ de vecteurs (contrairement à ce qui se passe pour un champ de scalaires); ils ne permettent pas notamment de donner sous une forme indépendante du système de coordonnées une expression de la dérivée de ce champ suivant un vecteur.

14*. Divergence d'un champ de vecteurs. — L'invariant scalaire $\vec{D}.\vec{a}$ est appelé « *divergence du champ de vecteurs* » et on le représente quelquefois par

$$\text{div}.\vec{a}.$$

Dans le cas d'un système de coordonnées rectangulaires, le terme $\vec{i}.\dfrac{\partial \vec{a}}{\partial x}$ de la divergence est la dérivée par rapport à x de la projection de $\vec{a}$ sur l'axe des x. La divergence a par suite ponr expression

$$\text{div}.\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

en appelant a_x, a_y, a_z les composantes de $\vec{a}$ sur les axes.

On peut mettre sous une forme analogue l'expression de la divergence en coordonnées curvilignes. Exprimons $\vec{a}$ en fonction de ses composantes par rapport au trièdre tangent, soit

$$\vec{a} = a_u.\vec{u} + a_v.\vec{v} + a_w.\vec{w}.$$

Dérivons par rapport à u et multiplions par $\vec{U}$; les termes en $\vec{v}$ et $\vec{w}$ disparaissent et il reste

$$\vec{U}.\frac{\partial \vec{a}}{\partial u} = \frac{\partial a_u}{\partial u} + \vec{U}.\left(a_u.\frac{\partial \vec{u}}{\partial u} + a_v.\frac{\partial \vec{v}}{\partial u} + a_w.\frac{\partial \vec{w}}{\partial u}\right).$$

En tenant compte de ce que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont déjà les dérivées de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à v et w (n° 6*), on a, moyennant certaines conditions de continuité,

$$\overline{\partial u} - \overline{\partial w}.$$

Remplaçons dans la formule précédente, puis portons cette expression et les deux autres qu'on obtient par une voie analogue, dans l'expression de la

Les intégrales simples sont égales respectivement aux variations de

$$(\delta . a_u); \quad (\delta . a_v); \quad (\delta . a_w).$$

Les deux dernières étant prises sur un contour fermé sont nulles; la première est prise entre les valeurs o et u_0 de u; pour $u = 0$, le déterminant δ est nul; pour $a = u_0$, on obtient la valeur de la parenthèse sur la surface limite S. On peut écrire cette valeur

$$\delta . a_u = \delta . \left(\vec{U} . \vec{a}\right).$$

Mais d'autre part, par rapport au plan tangent à S, la normale $\vec{n}_e$ dirigée vers l'extérieur est du même côté que le vecteur $\vec{u}$ (sens des u croissants) et par suite que le vecteur $\vec{U}$ qui est normal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$, donc à la surface. On a

et

$$\vec{v} \wedge$$

Par conséquent l'intégrale de volume est égale à l'intégrale double

$$. \vec{a}) . \left| \vec{v} \wedge \vec{w} \right| . dv . dw.$$

D'après le n° 10*, l'expression $\left| \vec{v} \wedge \vec{w} \right| . dv . dw$ est égale à l'élément de surface de S (où les coordonnées curvilignes sont v et w); cette intégrale est donc bien égale à l'intégrale de surface qui constitue le second membre de la formule de Green, qui se trouve ainsi établie.

La formule de Green contient de nombreuses conséquences, qu'il n'est pas possible de développer ici; on en trouvera notamment des applications dans tous les Traités de Physique ([1]). Indiquons seulement son application immédiate aux champs de vecteurs sans divergence :

Si, dans un champ de vecteurs, la divergence est constamment nulle, le flux du vecteur à travers une surface fermée quelconque est nul ([2]); *par suite le flux du vecteur à travers une surface ouverte ne dépend que de la courbe qui limite cette surface.*

19*. Formules du gradient et du rotationnel. — Dans l'intégrale de surface de la formule de Green, le coefficient de $d\sigma$ est *un scalaire fonction linéaire des composantes de* $\vec{n}_e$ suivant trois axes. On peut généraliser cette formule en introduisant comme coefficient de $d\sigma$ *un vecteur* $\vec{N}$ *dont les*

([1]) En particulier le *Cours d'Électricité* de G. Bruhat, professeur à la Faculté des Sciences de Lille (1923).

([2]) Ceci est notamment le cas pour un *champ de rotationnels* (n° 17*).

NOTE II.

MOUVEMENT D'UN PLAN SUR UN PLAN.

1. Centre instantané de rotation.** — Nous avons vu au n° 239 que, si, dans le mouvement d'un corps solide S_2 par rapport à un corps solide S_1, un plan P_2 de S_2 reste constamment en coïncidence avec un plan P_1 de S_1, il y a, à chaque instant t, une rotation instantanée tangente $\vec{\omega}$ (perpendiculaire au plan) ou, exceptionnellement, une translation tangente ou un repos tangent.

Sauf dans le cas d'une translation continue, ce mouvement s'obtient par le roulement sans glissement d'un cylindre roulette de S_2 sur un cylindre base de S_1.

Le mouvement du plan P_2 *par rapport au plan* P_1, *dont l'étude fera l'objet de cette Note, est réalisé par le roulement sans glissement d'une courbe roulette* C_2 *du plan* P_2 *sur une courbe base* C_1 *du plan* P_1; ces courbes sont les sections droites des cylindres base et roulette par les plans P_1

Pour déterminer les éléments du mouvement de P_2 par rapport à P_1, à un instant donné t, nous supposerons qu'il y a effectivement une rotation tangente. Le point I où l'axe de rotation perce les deux plans est le point de contact, à l'instant considéré des courbes base et roulette; on l'appelle *le centre instantané de rotation à l'instant t*.

La rotation $\vec{\omega}$ est perpendiculaire au plan, en appelant $\vec{k}$ le vecteur directement perpendiculaire au plan supposé orienté (n° 28), nous poserons

$$\vec{\omega} = \vec{k}.\omega.$$

La vitesse $\vec{v}$ d'un point M du plan P_2 a pour expression (n° 221)

$$\text{(1)} \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM} = \omega.(\vec{k} \wedge \overrightarrow{IM}).$$

La distribution des vitesses est la même, à l'instant t, que si le plan P_2 *tournait autour du point* I *avec la vitesse angulaire* ω; le vecteur $\vec{v}$ est

directement ou inversement perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{IM}$ selon que ω est positive ou négative.

Le centre instantané I est mobile à la fois dans les deux plans P_2 et P_1; sa trajectoire absolue (sur P_1) est la base; sa trajectoire relative (sur P_2), la roulette.

La vitesse d'entraînement de I étant nulle, sa vitesse absolue (sur C_1) est équipollente à sa vitesse relative (sur C_2); nous désignerons par $\vec{w}$ cette vitesse commune et nous poserons

$$\vec{w} = \omega.\overrightarrow{IT},$$

le vecteur $\overrightarrow{IT}$ ainsi défini a les dimensions d'une longueur (*fig.* 1**).

Nous appellerons encore $\overrightarrow{IJ}$ le vecteur déduit de $\overrightarrow{IT}$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$

$$\overrightarrow{IJ} = -\vec{k} \wedge \overrightarrow{IT} = -\frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{w}),$$

$\overrightarrow{IT}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont respectivement tangent et normal à la base et à la roulette en I; le point J est indépendant du sens de rotation choisi dans le plan orienté. De sa définition on déduit d'ailleurs

$$\vec{w} = \omega.\overrightarrow{IT} = \omega.(\vec{k} \wedge \overrightarrow{IJ}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IJ}.$$

La dernière expression est, d'après (1), la vitesse d'entraînement du point J dans le mouvement de P_2; on aboutit ainsi à une nouvelle définition de J :

Le point J *est le point de* P_2 *qui, à l'instant* t, *a une vitesse d'entraînement équipollente à la vitesse (absolue ou relative) du centre instantané* I.

2. Normales aux trajectoires.** — *La normale à la trajectoire d'un point* M *de* P_2, *à un instant* t, *passe par le centre instantané* I.

Effectivement, la vitesse de M à l'instant t étant, d'après la formule (1), perpendiculaire à $\overrightarrow{IM}$, il en est de même de la tangente à la trajectoire de M.

Il y a exception pour le point M de P_2 qui, à l'instant t, coïncide avec le centre I; sa vitesse est nulle et I est un point singulier de la trajectoire de M (n° 106). La tangente à la trajectoire porte alors le vecteur accélération, puisque l'accélération normale est nulle (n° 212). Nous reviendrons plus loin sur la construction de cette accélération et par suite de la tangente.

3. Enveloppe d'une courbe.** — Étant donnée une courbe E_2 de P_2, ses positions successives dans P_1 constituent une famille de courbes qui, en général, a une enveloppe E_1 :

En tout point M *où la position de la courbe* E_2, *à l'instant* t, *touche son enveloppe* E_1, *la normale commune à* E_2 *et* E_1 *passe par* I; *réciproquement, tout point de* E_1 *ou de* E_2 *dont la normale passe par* I *est un point de contact des deux courbes; notamment si l'une des courbes passe par* I, *l'autre la touche en ce point.*

En particulier, si une courbe E_2 *du plan* P_2 *passe constamment par un point fixe* O_1 *du plan* P_1, *la normale à* E_2 *en* O_1 *passe par* I.

Effectivement, définissons E_2 dans le plan P_2 en nous donnant la position du point M qui la décrit en fonction d'un paramètre λ. Le vecteur $\overrightarrow{O_1M}$ ayant pour origine un point fixe de P_1 est une fonction de λ et de t. Sa dérivée partielle par rapport à λ

$$\left(\overrightarrow{O_1M}\right)$$

est portée par la tangente à la courbe E_2 (t étant considéré comme constant). La dérivée partielle par rapport à t (λ constant) est la vitesse d'entraînement du point M, donc

$$\left(\overrightarrow{O_1M}\right)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de contact est que M ne soit pas un point singulier et que (n° 163)

Cette condition exprime bien que $\overrightarrow{IM}$ est nul ou perpendiculaire à $\vec{u}_2$, qui n'est pas nul, puisque M n'est pas singulier sur E_2.

4. Détermination du centre instantané.** — La détermination du centre instantané s'obtient par des formules ou des constructions qui dépendent essentiellement de la manière dont le mouvement de P_2 par rapport à P_1 est défini. Des propriétés des normales aux trajectoires des points mobiles et des normales aux points de contact des courbes mobiles avec leurs enveloppes (nos 2** et 3**) il résulte qu'il suffit de connaître deux tels éléments pour déterminer le point I : c'est l'intersection de deux de ces normales. Par exemple, dans le mouvement de l'ellipsographe (n° 165), le centre instantané est à l'intersection des perpendiculaires en A et B aux axes Ox, Oy [1] (*fig.* 72).

Voici une autre méthode utilisée quand le mouvement de P_2 par rapport

[1] De ce centre instantané, on déduira immédiatement la construction de la normale en M à une trajectoire (ellipse) et du point de contact E de la droite AB avec son enveloppe (hypocycloïde).

On obtiendrait la même expression en cherchant la dérivée seconde de $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, le point A étant considéré comme fixe et la vitesse angulaire étant toujours ω (c'est-à-dire encore en cherchant l'accélération d'entraînement de M par rapport à un plan $\mathrm{P_A}$ invariablement lié au point A et glissant sur $\mathrm{P_1}$ d'un mouvement de translation). On a en effet dans ce cas

$$\frac{\quad}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}};$$

Donc : *la distribution des accélérations dans le plan mobile* $\mathrm{P_2}$, *à l'instant* t, *est la même que si le plan tournait autour du centre* A.

On peut d'ailleurs remarquer que, dans les deux termes qui composent $\vec{\gamma}$, le premier est l'accélération tangentielle, le second l'accélération normale dans le mouvement circulaire de M tournant autour de A avec une vitesse angulaire ω.

9**. **Construction géométrique des vitesses et des accélérations.** — Pour représenter géométriquement les vitesses et les accélérations sur une figure on peut choisir arbitrairement les longueurs λ_c, λ_v et λ_γ représentant les unités de longueur, vitesse et accélération.

Donnons-nous, à un instant t, le centre instantané I, la circonférence de diamètre IJ et sur cette circonférence le centre A des accélérations, ce qui détermine le quotient (indépendant des unités) $\omega'_t : \omega^2$. Donnons-nous en outre le vecteur $\vec{v}$, vitesse de I perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, et le vecteur $\vec{\Gamma}$, accélération de I porté par $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et de même sens. On peut choisir ces vecteurs arbitrairement puisque leur longueur dépend des longueurs indépendantes λ_v et λ_γ.

Ceci posé, la vitesse $\vec{v}$ d'un point M est donnée par le produit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{IM}} = \omega\left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{IM}}\right).$$

---

celle qu'on en déduit en faisant son produit extérieur par $\vec{\omega}'_t$, puis en développant le double produit

$$\omega^2.\left(\vec{\omega}'_t \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + (\omega'_t)^2.\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\omega}'_t \wedge \vec{\gamma}_0.$$

En éliminant le produit extérieur, il vient

$$[\omega^4 + (\omega'_t)^2].\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \omega^2.\vec{\gamma}_0 + \vec{\omega}'_t \wedge \vec{\gamma}_0,$$

expression qui détermine la position du point A dans le plan mobile $\mathrm{P_2}$.

Si, à l'instant t, la trajectoire de M a sa courbure nulle, l'accélération normale de M est nulle (n° 212). Or l'accélération normale est la projection de $\vec{\gamma}$ sur la normale $\overrightarrow{IM}$; en prenant $\vec{\gamma}$ sous la forme (2), on a

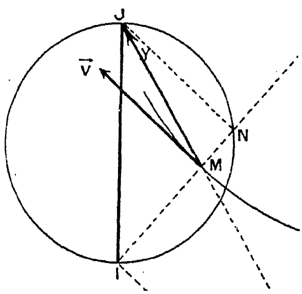
$$\gamma.IM = IM.[\omega'_t.(k \wedge IM) - \omega^2.JM] = -\omega^2.(IM.JM),$$

dans le développement le produit mixte étant évidemment nul. Donc, pour que la courbure soit nulle, il faut et il suffit que l'angle (IM, JM) soit droit, c'est-à-dire que M soit sur la circonférence de diamètre IJ. D'après le n° 7**, cette circonférence est le lieu des centres des accélérations pour les divers mouvements admettant le même mouvement géométrique.

A cause de cette propriété le point J est appelé *centre des inflexions* (1).

12. Courbure d'une trajectoire.** — On déduit la courbure d'une trajec-

Fig. 2**.



toire de l'expression que nous venons d'obtenir pour $\vec{\gamma}.\overrightarrow{IM}$. Ce produit inté-

(1) Le centre instantané I se trouve sur la circonférence des inflexions, cependant

I.

Image (Point) d'un point d'une surface ou d'un espace.......... 136, 6*
Indicatrice ou hodographe d'une fonction vectorielle.......... 81, 135
— des tangentes.......... 123
— des binormales.......... 124
Inflexion (Point d') d'une courbe plane ou gauche.......... 105, 131
Intégrales simples.......... 96
— doubles et multiples.......... 142, 143
— de volume.......... 9*
— de surface.......... 10*
Intérieur (Produit) de deux vecteurs.......... 18, 5*
Intrinsèque (Équation) d'une courbe.......... 166
— (Équation) d'un mouvement.......... 209
Invariant d'une parabole.......... 117
— simultané de deux systèmes de vecteurs.......... 192
Invariants différentiels d'un champ.......... 13*
— d'un système de vecteurs.......... 184
Inverse (Trièdre ou sens de rotation).......... 17
Inverses (Substitutions linéaires).......... 3*

L.

Lagrange (Identité de).......... 29
Laplacien d'un champ de scalaires, de vecteurs.......... 17*
Lemniscate.......... 118
Liés (Grandeurs vectorielles ou vecteurs).......... 171
Lignes de champ d'un champ de vecteurs.......... 8*
Limite d'une fonction vectorielle.......... 80, 134
Linéaire (Complexe) de droites.......... 204
— (Faisceau) de systèmes de vecteurs.......... 202
— Substitution.......... 3*
Longitude d'un point d'une sphère.......... 57, 148

M.

Méridien (Plan) d'une surface de révolution.......... 148
Méridienne d'une surface de révolution.......... 148
Mesure d'un vecteur sur une droite dirigée.......... 6
Meusnier (Théorème de).......... 157
Mixte (Produit) de trois vecteurs.......... 32, 5*
Module d'un vecteur.......... 3
Moment d'un vecteur glissant.......... 172
— d'un vecteur glissant par rapport à un axe.......... 178
— relatif de deux vecteurs glissants.......... 179

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.
PRÉFACE V

CHAPITRE I.

Opérations élémentaires sur les vecteurs.

I. — Équipollence et mesure sur un axe.

1. Grandeurs scalaires et grandeurs dirigées 1
2. Vecteurs 2
3. Éléments d'un vecteur 3
4. Représentation d'une grandeur vectorielle 4
5. Équipollence 5
6. Vecteurs de même direction 6
7. Produit d'un vecteur par un scalaire 8

II. — Somme géométrique.

8. Définition de la somme 10
9. Vecteur opposé 12
10. Différence 12
11. Théorème de Chasles 14
12. Identités géométrico-algébriques 14

III. — Projections et axes de repère.

13. Projections (parallèles) 16
14. Coordonnées ou projections d'un vecteur 18
15. Opérations sur les projections 19
16. Sens des trièdres 21
17. Orientation de l'espace 24

IV. — Produit intérieur ou scalaire de deux vecteurs.

18. Définition du produit intérieur 26
19. Expressions diverses du produit intérieur 27
20. Propriétés du produit intérieur 28

Pages.
142. Intégrales doubles 204
143. Fonctions vectorielles de plusieurs variables. Champs de vecteurs 205

II. — *Surfaces et plans tangents.*

144. Plan tangent et normale en un point simple d'une surface 206
145. Point singulier d'une surface 209
146. Surface cylindrique 214
147. Surface conique 215
148. Surface de révolution 216
149. Surface réglée 219
150. Autres exemples de surfaces 223

III. — *Courbes tracées sur une surface.*

151. But du présent paragraphe 224
152. Arc d'une courbe sur une surface 225
153. Angle de deux courbes d'une surface 226
154. Exemples de ds^2 228
155. Surfaces applicables 230
156. Courbure d'une courbe sur une surface 231
157. Théorème de Meusnier 232
158. Expressions de D, D′, D″ 234
159. Courbure d'une surface de révolution 236
160. Variation des courbures normales 237

IV. — *Familles de courbes.*

161. Trajectoires 242
162. Trajectoire orthogonale 242
163. Enveloppe d'une famille de courbes 244
164. Familles de courbes dans un plan 245
165. Mouvement de l'ellipsographe 247
166. Famille de droites dans un plan 249
167. Surfaces développables 252
168. Développantes d'une courbe gauche 256
169. Développées des courbes gauches 256
170. Développées gauches des courbes planes 259

CHAPITRE V.

Vecteurs glissants et systèmes de vecteurs.

I. — *Vecteurs glissants.*

171. Grandeurs vectorielles libres, glissantes et liées 261
172. Moment d'un vecteur glissant 263

NOTE I.

Coordonnées obliques et curvilignes. Champs de scalaires et de vecteurs. Invariants différentiels.

Pages.

1*. Trièdres supplémentaires 358
2*. Coordonnées contravariantes d'un vecteur 359
3*. Changement de coordonnées. Substitutions contravariantes 360
4*. Formules de transformation de coordonnées 362
5*. Formules d'angles et distances en coordonnées obliques 364
6*. Coordonnées curvilignes 366
7*. Exemples de systèmes de coordonnées 367
8*. Champ de scalaires et de vecteurs 369
9*. Intégrale de volume 370
10*. Intégrale de surface 372
11*. Dérivée d'un champ suivant un vecteur 374
12*. Gradient d'un champ de scalaires 376
13*. Invariants différentiels d'un champ de vecteurs 378
14*. Divergence d'un champ de vecteurs 379
15*. Rotationnel d'un champ de vecteurs 381
16*. Calcul des invariants différentiels 383
17*. Invariants différentiels du second ordre 385
18*. Formule de Green 386
19*. Formules du gradient et du rotationnel 388
20*. Formule de Stokes 390

NOTE II.

Mouvement d'un plan sur un plan.

1**. Centre instantané de rotation 393
2**. Normales aux trajectoires 394
3**. Enveloppe d'une courbe 394
4**. Détermination du centre instantané 395
5**. Accélération d'un point 396
6**. Accélération d'entraînement du centre instantané 397
7**. Centre des accélérations 397
8**. Distribution des accélérations 398
9**. Construction géométrique des vitesses et des accélérations 399
10**. Mouvement géométrique 400
11**. Circonférence des inflexions 400
12**. Courbure d'une trajectoire 401
13**. Courbure d'une enveloppe 402
14**. Formule d'Euler-Savary 405

Table alphabétique des définitions 407